

ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ

ГЛАВА 1

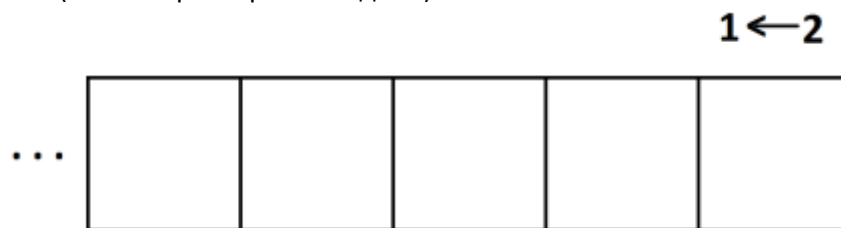
МАШИНИ

Добре дошли на борда на нашето приключение.

Това е математическо приключение базирано върху една моя история (аз съм Джеймс), която не е истинска.

Когато бях дете, аз изобретих една машина - това не е вярно - и тази машина не е нищо повече от един ред от кутии, който ред продължава толкова далече наляво, колкото си поискаш.

Аз реших да дам име на тази моя машина. Нарекох я “две-едно машина” и за по-смешно записах името ѝ наобратно. (Толкова разбирах като дете.)



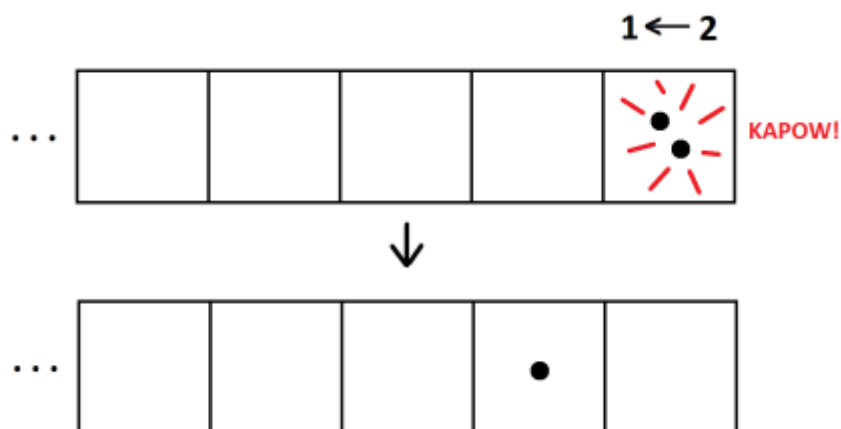
И какво можете да правите с тази машина? Можете да слагате точки. Точките винаги се поставят в най-дясната кутия.

Щом сложите една точка, нищо не става: тя си стои на мястото като една точка. Нищо кой знае какво!



Но ако сложите още една точка – както винаги в най-дясната кутия – тогава се случва нещо невероятно.

Всеки път, когато две точки са в една кутия те експлодират и изчезват - БУМ! - и биват заменени с една точка, една кутия по-наляво.



(Сега виждате ли защо я нарекох “ $1 \leftarrow 2$ машина” записана по този смешен начин?)

Видяхме, че две точки поставени в машината се превърнаха в една точка, следвана от нула точки.

Слагаме трета точка – винаги в най-дясната кутия – и на картинката получаваме точка, следвана от друга точка.

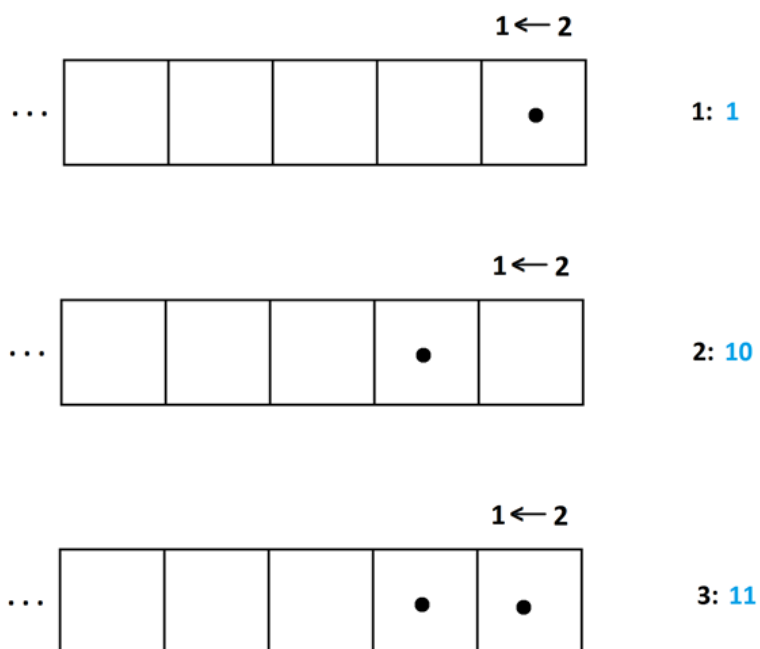


Аз осъзнах, че тази машина, в моята неистинска история, ми дава кодови номера на числата.

Ако сложа само една точка в нея, тя си стои като една точка. В такъв случай кодът на числото едно, който $1 \leftarrow 2$ машината ни казва, е просто **1**.

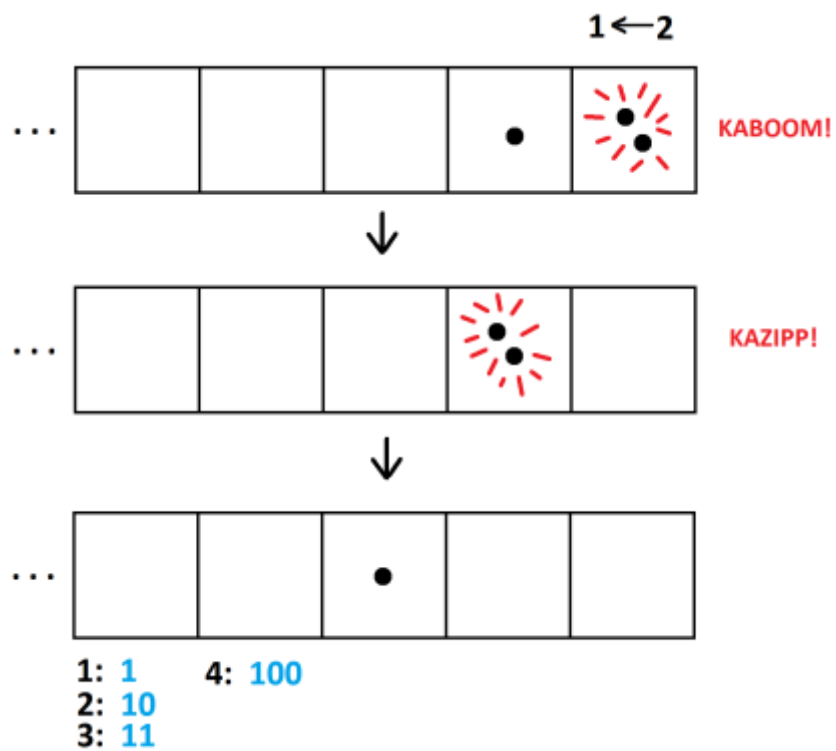
Ако сложа две точки в машината една след друга, получавам една точка, последвана от нула точки. В такъв случай кодът на числото две, който $1 \leftarrow 2$ машината ни казва, е **10**.

Когато сложа трета точка, от машината изниква кода **11** на числото три.



Какъв е кодът на числото четири, който $1 \leftarrow 2$ машината ще даде?

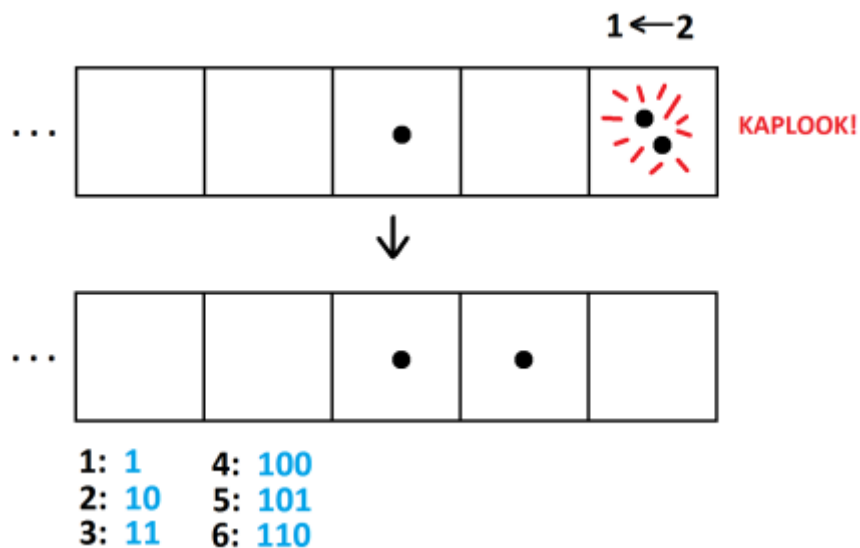
Поставянето на четвъртата точка е особено интересно: очакват ни множество експлозии!



Кодът на числото четири, който $1 \leftarrow 2$ машината ни даде е 100 .

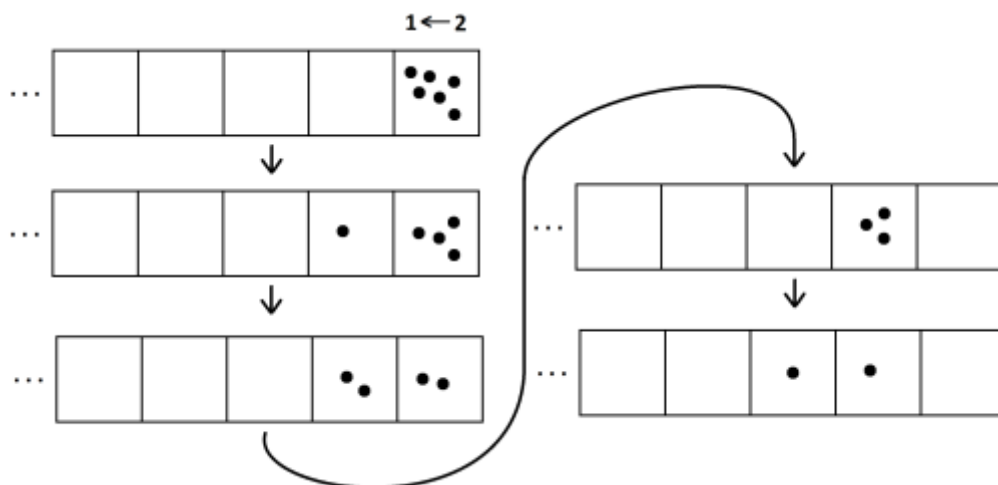
Какъв ще бъде кодът на числото пет? Можете ли да видите, че е 101 ?

А кодът на числото шест? Добавяйки още една точка към кода на пет получаваме 110 за кода на шест.



Всъщност ние можем да получим кода на числото шест като изчистим машината от всички точки и поставим шест точки в най-дясната кутия наведнъж. Няколко двойки точки ще експлодират, всяка от тях оставяйки една точка в следващата кутия вляво.

Ето една възможна последователност от експлозии. Тук сме пропуснали звуковите ефекти!



Вие получавате ли същия код 110 ако извършите експлозиите в различен ред? (Опитайте!)

Това са няколко въпроса, на които може да решите или може да не решите да отговорите. Моите решения на тези въпроси се намират в края на тази глава.

1. а) Какъв е кодът на числото тринадесет, който $1 \leftarrow 2$ машината ще даде?
(Оказва се, че той е 1101 . Можете ли да получите отговора?)
 - б) Какъв е кодът на числото петдесет? (Уау!)
2. Може ли едно число да има код 100211 , който $1 \leftarrow 2$ машината да даде, ако приемем че винаги решаваме да експлодираме точките, които можем?
3. Кое число има за код 11001 в $1 \leftarrow 2$ машината?

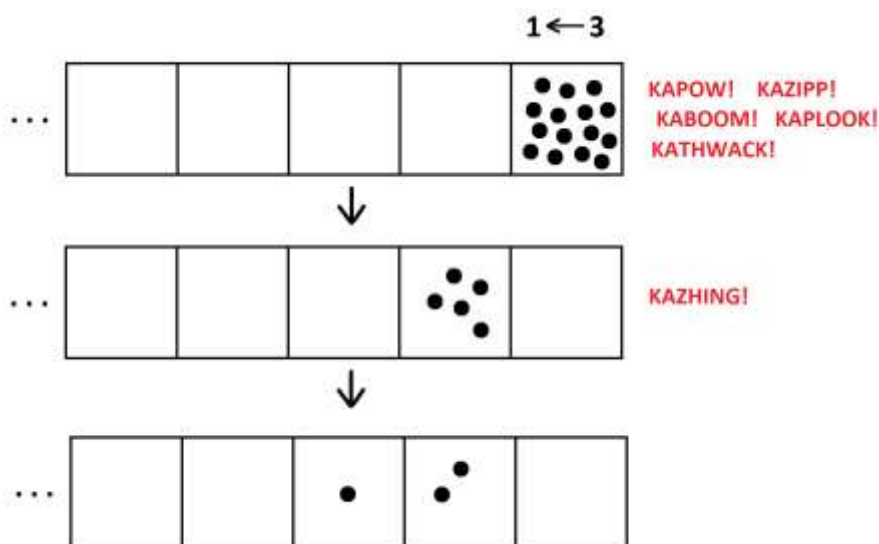
Човек може с часове да се забавлява играейки си с $1 \leftarrow 2$ машината.

Но един ден аз получих едно поразително прозрение!

ДРУГИ МАШИНИ

Вместо да си играя с $1 \leftarrow 2$ машина, аз установих, че мога да си играя с $1 \leftarrow 3$ машина (отново се пише и четете наопаки - "три-едно" машина). Сега всеки път когато три точки се намират в една кутия, те експлодират и биват заместени от една точка в съседната кутия вляво.

Ето какво става, когато сложим петнадесет точки в една $1 \leftarrow 3$ машина.



Първоначално стават пет експлозии в първата кутия, а след всяка от тях се добавя по една точка във втората кутия отляво. След това три от тези точки експлодират. Две точки остават в тази кутия, а една точка се появява едно място по-наляво. Така виждаме кода 120 , отговарящ на числото петнадесет в една $1 \leftarrow 3$ машина.

Ето ви няколко въпроса, по които може да решите или може да не решите да си помислите.

4. а) Покажете, че кодът на числото четири в $1 \leftarrow 3$ машината е 11 .
 б) Покажете, че кодът на числото тринадесет в $1 \leftarrow 3$ машината е 111 .
 в) Покажете, че кодът на числото двадесет в $1 \leftarrow 3$ машината е 202 .
5. Може ли едно число да има 2041 за код в една $1 \leftarrow 3$ машина? Ако да, то кодът би ли бил "стабилен"?
6. Кое число има за код 1022 в една $1 \leftarrow 3$ машина?

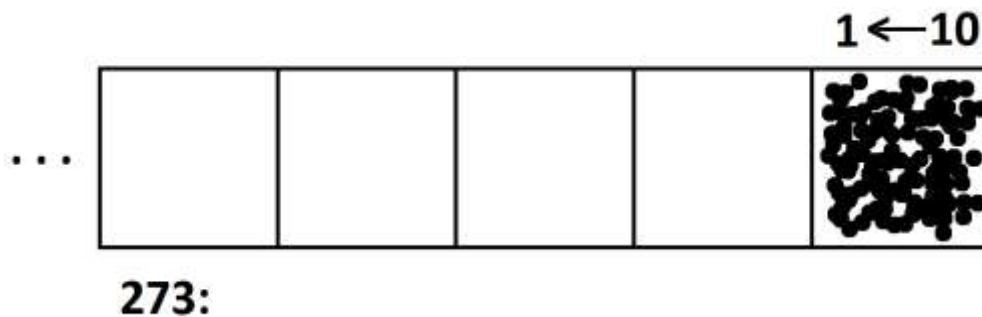
Да продължим нататък!

7. Какво си мислите, че би било правилото за една $1 \leftarrow 4$ машина?
 Какъв е $1 \leftarrow 4$ кодът на числото тринадесет?
8. Какъв е $1 \leftarrow 5$ кодът на числото тринадесет?
9. Какъв е $1 \leftarrow 9$ кодът на числото тринадесет?
10. Какъв е $1 \leftarrow 5$ кодът на числото дванадесет?
11. Какъв е $1 \leftarrow 9$ кодът на числото двадесет?

Чудесно. А сега нека пощуреем.

Нека вземем една $1 \leftarrow 10$ машина и сложим 273 точки в нея!

Какъв е тайният $1 \leftarrow 10$ код за числото 273 ?



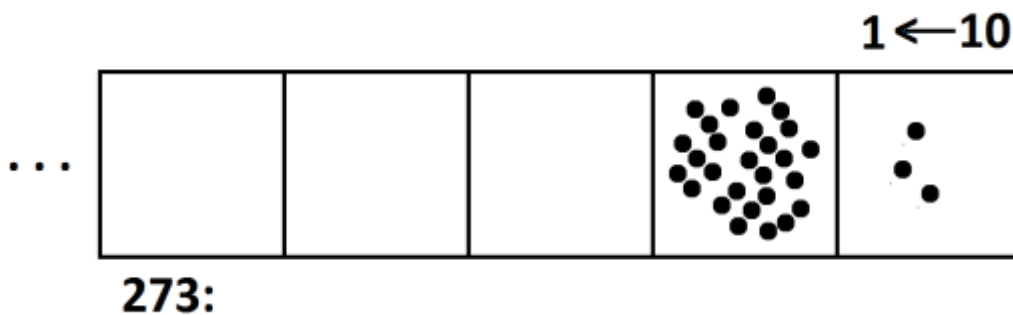
Следните въпроси изникнаха докато си мислих за това.

Ще има ли въобще някакви експлозии? Има ли групи от по десет, които ще експлодират? Разбира се!

Колко експлозии ще имаме първоначално? Двадесет и седем.

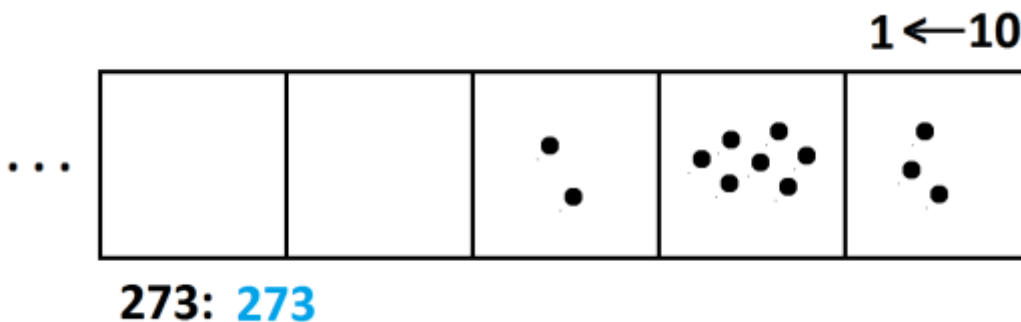
Ще има ли останали точки? Да. Три.

Супер. Значи ще станат двадесет и седем експлозии, всяка от тях завършваща с поставянето на една точка в следващата кутия вляво, а три точки остават непокътнати.



Ще има ли още експлозии? Да. Още две.

Ще има ли останали точки? Седем точки остават.



Кодът на числото двеста седемдесет и три в $1 \leftarrow 10$ машината се оказва... 273 . Уау!

12. а) Какъв е $1 \leftarrow 10$ кодът на числото тринадесет?
b) Какъв е $1 \leftarrow 10$ кодът на числото тридесет и седем?
c) Какъв е $1 \leftarrow 10$ кодът на числото 5846 ?

Случва се нещо любопитно!

Какъв е големият естествен въпрос, който да си зададем?



ЗА ЩУРИ ИЗСЛЕДОВАТЕЛИ

Ето няколко “големи въпроса” за изследване, с който може да решите да се захванете, или поне да помислите по тях. Всичко ще се изясни, когато историята продължи към своята развръзка в следващите глави, но би било забавно да се замислите върху тези идеи още сега.

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 1: КАКВО ПРАВЯТ ТЕЗИ МАШИНИ?

Можете ли да разберете какво всъщност правят тези машини?

Защо кодът на двеста седемдесет и три в $1 \leftarrow 10$ машината е “273”? Всички числа ли имат $1 \leftarrow 10$ кодове, които са същите като както нормално пишем числата?

Ако можете да отговорите на този въпрос, тогава можете ли да разберете кодовете в $1 \leftarrow 2$ машината? Какво означава кодът 1101 за числото тринадесет?

Забележка: Глава 2 отговаря на тези въпроси.

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 2: ИМА ЛИ ЗНАЧЕНИЕ РЕДЪТ, В КОЙТО СТАВАТ ЕКСПЛОЗИИТЕ?

Сложете деветнадесет точки в най-дясната кутия на една $1 \leftarrow 2$ машина и експлодирайте двойки точки по произволен начин: експлодирайте няколко двойки в най-дясната кутия, после експлодирайте няколко във втората кутия, после няколко в най-дясната отново, после пак няколко във втората и т.н. Направете го отново, този път сменяйки реда, в който извършвате експлозиите. И после отново!

Всеки път ли излиза кодът 10011 ?

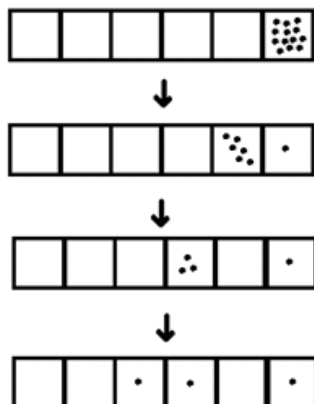


РЕШЕНИЯ

Както ви обещах, тук са решенията на въпросите от преди малко.

1.

а) Ето как кодът 1101 се появява като започнем с тринадесет точки.



б) Кодът на петдесет е 110010 .

2. Ако приемем, че винаги ще решаваме да експлодираме точките, ако можем, тогава кодът 100211 е непълен: двете точки в третата кутия отляво могат да експлодират и тогава финалният код ще бъде 101011 .

3. Това е кодът на числото деветнадесет. (В следващия урок ще открием един бърз метод да видим това.)

4. а) Давайте! б) Давайте пак! с) Вие сте в серия. Направете и третия въпрос!

5. Отново, ако приемем, че ще правим експлозии когато можем, тогава този код е непълен: три от точките в предпоследната кутия могат да експлодират и тогава финалният код ще бъде 2101 .

6. Това е кодът на числото тридесет и пет.

7. "Всеки път, когато четири точки са в една кутия те експлодират и изчезват. Те биват заменени с една точка, една кутия по-наляво." Числото тринадесет има за код 31 в една $1 \leftarrow 4$ машина.

8. 23

9. 14

10. 22

11. 22 (Същият код като предишният отговор – но, разбира се, начинът, по който интерпретираме кода, е различен.)

12. a) 13 b) 37 c) 5846 (Това са кодовете, които използваме за числата във всекидневния ни живот!)