

DES POINTS QUI EXPLOSENT

CHAPITRE 1

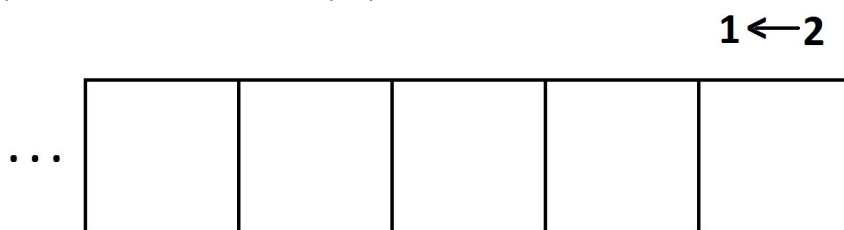
MACHINES

Joignez-vous à mon aventure.

Il s'agit d'un jeu mathématique d'après l'histoire (fausse) que moi, James, je vous raconte.

Quand j'étais petit, j'ai inventé une machine - c'est faux! Cette machine n'était qu'une série de boîtes qui s'étendaient aussi loin qu'on le souhaitait vers la gauche.

Je l'ai appelée « machine deux-un » dont le nom s'écrit et se lit étrangement de la droite vers la gauche. C'était ce que je pouvais faire de mieux à l'époque.



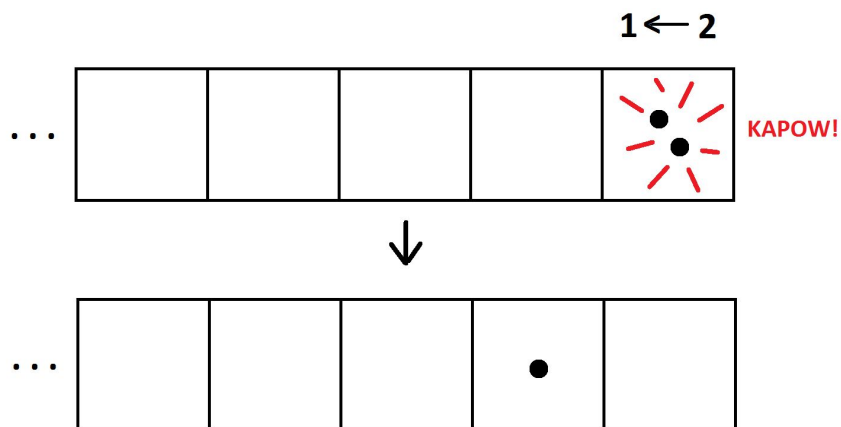
Mais à quoi sert cette machine? À y mettre des points. Les points sont toujours placés dans la boîte à l'extrême droite.

Mettons le premier point. Rien ne se passe : il ne reste qu'un simple point. Banal!



Mais ajoutez un deuxième point - toujours dans la boîte à l'extrême droite – et soudain, quelque chose de très intéressant se produit.

Dès que deux points se retrouvent dans une même boîte, ces points explosent et disparaissent - KAPOW! – et sont remplacés par un point, qui s'est déplacé d'une boîte vers la gauche.



(Voyez-vous maintenant pourquoi j'ai appelé cette « machine 2-1 » d'une façon particulière?)

Nous pouvons constater que les deux points placés dans la machine donnent un point suivi d'aucun point.

L'ajout d'un troisième point – toujours dans la boîte la plus à droite – est illustré par un point suivi d'un point.

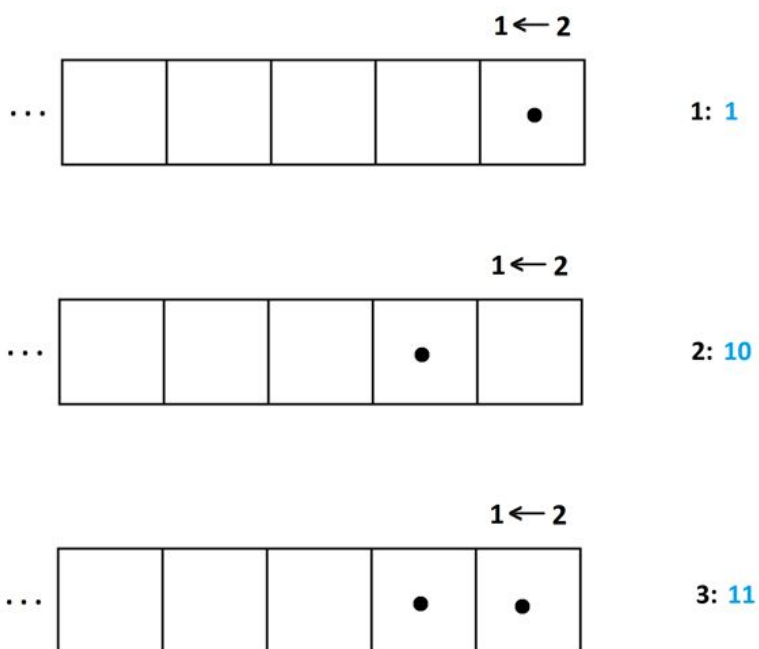


Dans le cadre de ma fausse histoire, j'ai réalisé que cette machine générait des codes associés aux nombres.

Un seul point mis dans la machine est resté un seul point. Nous pouvons supposer que le code de la machine $1 \leftarrow 2$ pour le nombre un est 1 .

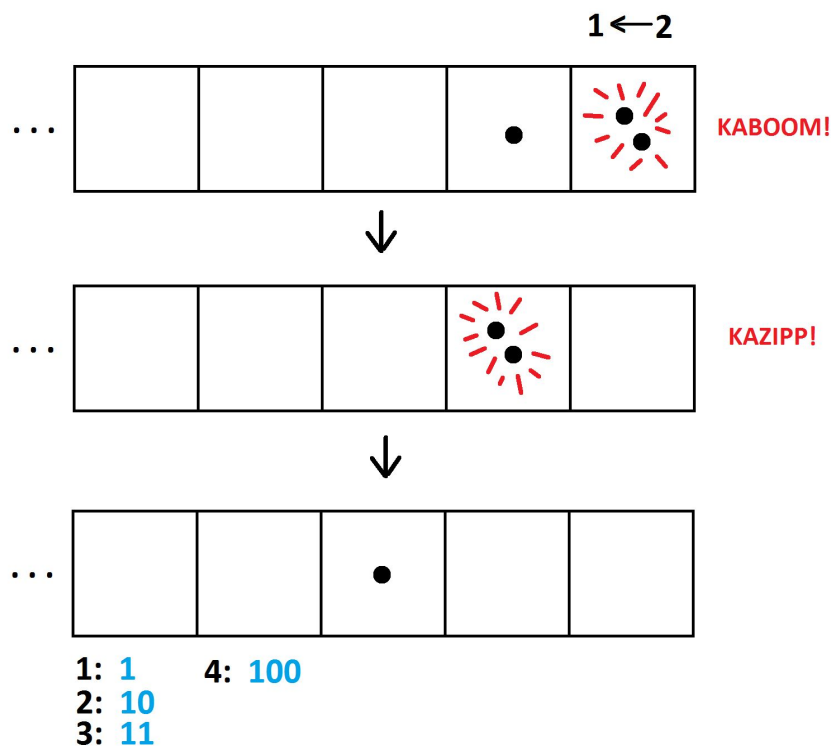
Deux points mis dans la machine, l'un après l'autre, ont donné un point dans une boîte suivi d'aucun point. Supposons que le code de la machine $1 \leftarrow 2$ pour deux points est 10 .

L'ajout d'un troisième point dans la machine représente que le code 11 est associé à trois points.



Quel sera le code de la machine $1 \leftarrow 2$ pour quatre points?

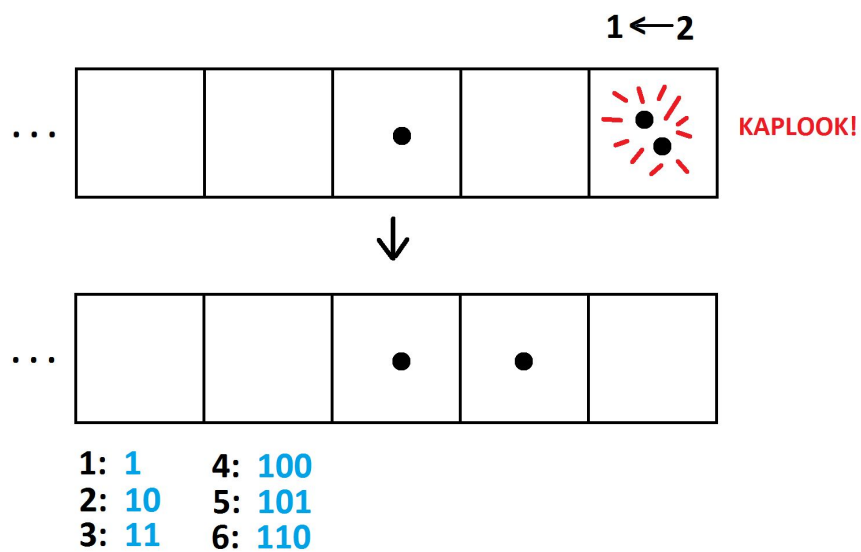
L'ajout d'un quatrième point dans la machine est particulièrement intéressant : nous obtenons ainsi de multiples explosions!



Le code de la machine $1 \leftarrow 2$ pour quatre est 100 .

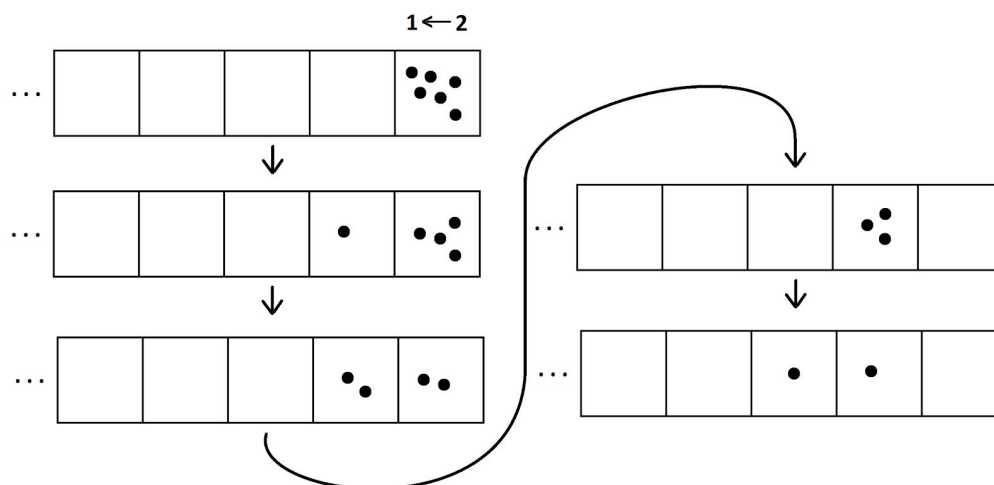
Quel sera le code pour cinq? Comprenez-vous que ce sera 101 ?

Et le code pour six? L'ajout d'un autre point au code associé aux cinq points équivaut à un code de 110 pour six points.



En fait, nous pouvons obtenir le code associé à six points en effaçant les points de la machine et en ajoutant six points du même coup. Les paires de points explosent tour à tour pour produire un point, dans la boîte voisine à gauche.

Voici une série possible d'explosions, les effets sonores en moins!



Obtenez-vous le même code final de 110 si vous produisez les explosions dans un ordre différent? (Faites-en l'essai!)

Voici quelques questions auxquelles vous pouvez tenter ou non de répondre. Mes réponses à celles-ci sont indiquées à la fin de ce chapitre.

1. a) Quel est le code de la machine $1 \leftarrow 2$ pour le nombre treize?
(Le code est 1101 . Arrivez-vous à cette réponse?)
 - b) Quel est le code pour cinquante dans cette machine? (Ouff!)
2. Un nombre peut-il être associé au code 100211 dans la machine $1 \leftarrow 2$, en partant du principe que nous devons faire exploser les points si c'est possible?
3. Quel nombre est associé au code 10011 dans la machine $1 \leftarrow 2$?

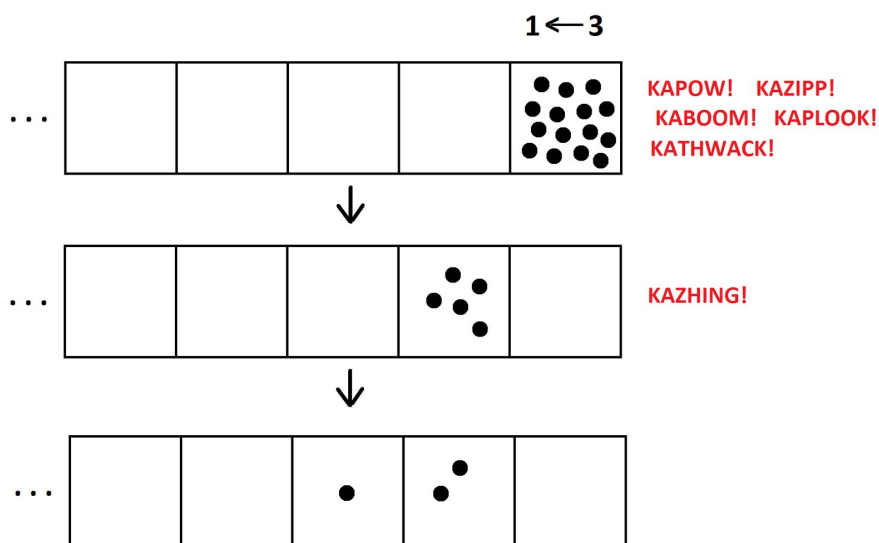
Nous pourrions passer des heures à nous amuser à trouver des codes dans une machine $1 \leftarrow 2$.

Mais, un jour, j'ai eu un véritable déclic!

AUTRES MACHINES

Au lieu de m’amuser avec une machine $1 \leftarrow 2$, j’ai réalisé que je pourrais plutôt jouer avec une machine $1 \leftarrow 3$ (de nouveau écrit et lu de la droite vers la gauche, c’est-à-dire une machine « trois-un »). Dans cette dernière machine, chaque fois que *trois* points sont placés dans une boîte, ils explosent en un point, déplacé dans la boîte voisine à gauche.

Voici ce qui arrive à quinze points mis dans une machine $1 \leftarrow 3$.



Tout d’abord, cinq explosions se produisent dans la première boîte, qui entraînent chacune le déplacement d’un point dans la deuxième boîte vers la gauche. Ensuite, trois de ces points explosent. Ainsi, deux points restent dans cette boîte et un nouveau point est déplacé dans la boîte vers la gauche.

Nous obtenons donc le code 120 pour quinze points dans une machine $1 \leftarrow 3$.

Voici d’autres questions auxquelles vous pourriez être tenté ou non de répondre.

4. a) Illustrez comment le code associé à quatre points dans une machine $1 \leftarrow 3$ équivaut à 11.
- b) Illustrez comment le code associé à treize dans une machine $1 \leftarrow 3$ équivaut à 111.
- c) Illustrez comment le code associé à vingt dans une machine $1 \leftarrow 3$ équivaut à 202.

5. Un nombre pourrait-il être associé au code 2041 dans une machine $1 \leftarrow 3$? Si tel est le cas, le code serait-il « stable »?

6. Quel nombre est associé au code 1022 dans une machine $1 \leftarrow 3$?

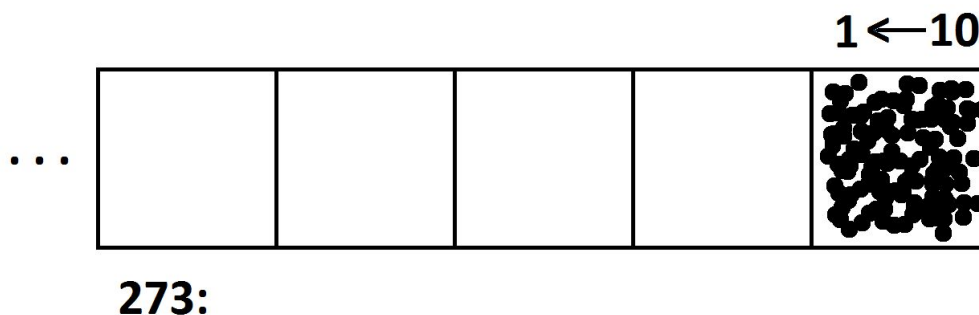
Nous pourrions poursuivre dans la même veine!

7. Selon vous, quelle est la règle qui s'applique dans une machine $1 \leftarrow 4$?
Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 4$ pour le nombre treize?
8. Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 5$ pour le nombre treize?
9. Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 9$ pour le nombre treize?
10. Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 5$ pour le nombre douze?
11. Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 9$ pour le nombre vingt?

OK. Le temps est venu de voir grand.

Aventurons-nous à utiliser une machine $1 \leftarrow 10$ et à y mettre 273 points!

Quel est le code secret d'une machine $1 \leftarrow 10$ pour le nombre 273 ?



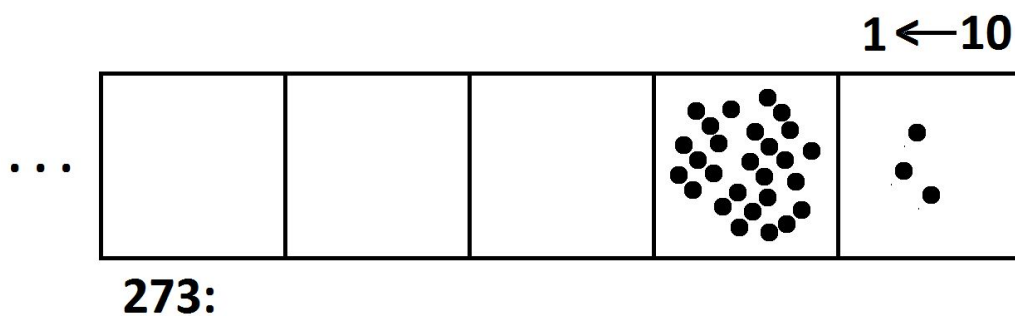
Mon processus de réflexion s'est fondé sur une série de questions.

Y aura-t-il des explosions? Des groupes de dix exploseront-ils? Assurément!

Combien d'explosions se produiront-elles au départ? Vingt-sept.

Restera-t-il des points qui n'exploseront pas? Oui. Trois.

OK. Ainsi, vingt-sept explosions surviendront, créant chacune un point déplacé dans la boîte voisine à gauche, et trois points resteront dans la boîte à droite.



Y aura-t-il d'autres explosions? Oui. Deux de plus.

Restera-t-il des points dans cette boîte? Sept.

Le code d'une machine $1 \leftarrow 10$ pour deux-cent-soixante-treize est... 273 . Oh!

- 12.** a) Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 10$ pour le nombre treize?
 b) Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 10$ pour le nombre trente-sept?
 c) Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 10$ pour le nombre 5846 ?

Quelque chose se produit!

Quelle est la « grande question » qu'il faut naturellement se poser?



EXPLORATIONS APPROFONDIES

Voici quelques « grandes questions » que vous pourriez approfondir, ou au moins aborder. Tout s'éclaircira lorsque nous en apprendrons plus dans les prochains chapitres, mais vous pourriez trouver amusant de vous pencher sur ces idées dès maintenant.

EXPLORATION 1 : QUE FONT CES MACHINES?

Pouvez-vous déterminer ce que ces machines font en réalité?

Pourquoi le code associé au nombre deux-cent-soixante-treize dans la machine $1 \leftarrow 10$ est-il 273 ?

Est-ce que tous les codes d'une machine $1 \leftarrow 10$ seront à tous les coups identiques à la façon habituelle dont nous écrivons les nombres?

Si vous pouvez répondre à cette question, parvenez-vous à comprendre la logique associée à tous les codes d'une machine $1 \leftarrow 2$? Que représente le code 1101 associé au nombre treize?

Commentaire : Le chapitre 2 vous fournira des réponses à ces questions.

EXPLORATION 2 : L'ORDRE SELON LEQUEL LES POINTS EXPLOSENT SEMBLE-T-IL AVOIR UNE INCIDENCE PARTICULIÈRE?

Mettez dix-neuf points dans la boîte à l'extrême droite d'une machine $1 \leftarrow 2$ et faites exploser les points de façon désorganisée : faites exploser une paire de points dans la boîte à l'extrême droite, puis quelques-uns dans la deuxième boîte, retournez en faire exploser dans la boîte à l'extrême droite, puis de nouveau dans la deuxième boîte, et ainsi de suite. Refaites ensuite l'exercice en changeant l'ordre des explosions. Faites l'exercice encore!

Obtenez-vous systématiquement le même code final 10011 ?

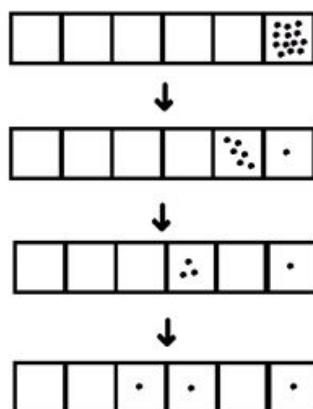


SOLUTIONS

Comme convenu, voici mes solutions aux questions posées.

1.

a) Voici comment le code 1101 est illustré pour treize points.



b) Le nombre cinquante est associé au code 110010 .

2. Partant du principe que nous déciderons toujours de faire exploser les points dès que nous le pouvons, le code 100211 ne serait donc pas complet : les deux points se trouvant dans la troisième boîte vers la gauche peuvent exploser afin de donner le code final de 101011 .

3. Il s'agit du code associé au nombre dix-neuf. (Nous verrons dans le cadre de la prochaine leçon un moyen rapide de trouver la réponse.)

4. a) Faites-le! b) Faites celui-ci aussi! c) Vous êtes bien parti. Allez! Faites cette troisième illustration!

5. De nouveau, si nous partons du principe que nous devons faire toutes les explosions possibles, ce code n'est pas complet : trois de points de la deuxième boîte vers la gauche peuvent exploser afin de donner le code 2111 .

6. Le nombre trente-cinq est associé à ce code.

7. « Quatre points dans n'importe quelle boîte explosent et sont remplacés par un point déplacé vers la boîte voisine à gauche. » Le nombre treize est associé au code 31 dans une machine $1 \leftarrow 4$.

8. 23

9. 14

10. 22

11. 22 (Il s'agit du même code qu'à la réponse précédente – cependant, bien sûr, l'interprétation du code est différente.)

12. a) 13 b) 37 c) 5846 (Voilà les codes que nous utilisons pour des nombres au quotidien!)