

DES POINTS QUI EXPLOSENT CHAPITRE 2

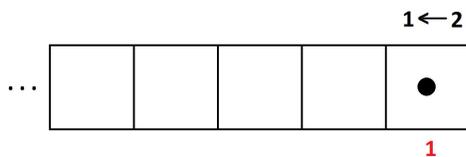
QUE FONT CES MACHINES EN RÉALITÉ?

D'accord. Le temps est maintenant venu d'expliquer ce que font réellement ces machines que nous avons décrites au chapitre précédent. (Avez-vous déjà pigé tout le concept? Vous êtes-vous fait les dents sur les explorations proposées à la fin de ce premier chapitre?)

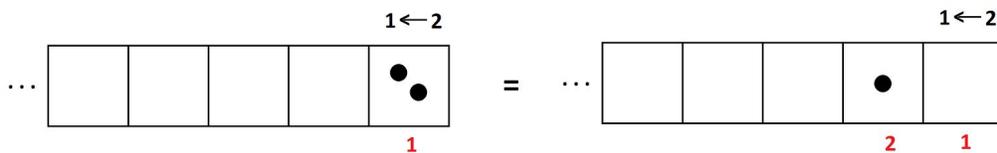
Faisons un retour sur la machine $1 \leftarrow 2$ afin de comprendre la logique derrière ce dispositif si particulier. Souvenez-vous que son fonctionnement se fonde sur la règle suivante :

Chaque fois que deux points se trouvent dans la même boîte, ils « explosent » ou, en d'autres mots, disparaissent et sont remplacés par un point, déplacé dans la boîte voisine à gauche.

Dans cette machine, les points dans la boîte à l'extrême droite équivalent toujours à un.

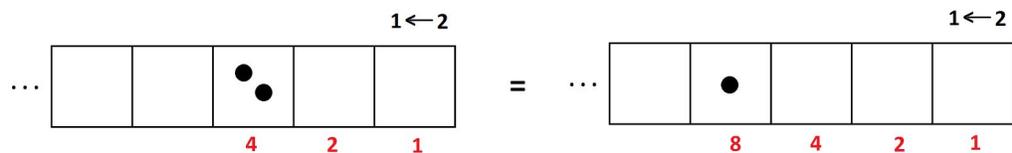


Après leur explosion, deux points de la boîte à l'extrême droite créent un point dans la boîte voisine à gauche. Étant donné que chaque point se trouvant dans la boîte la plus à droite égale 1, chaque point déplacé d'une boîte vers la gauche doit représenter deux, c'est-à-dire une valeur totale de 2.



Ainsi, deux points dans la deuxième boîte à partir de la droite permettent le déplacement d'un point déplacé d'une boîte vers la gauche. Ce dernier point équivaut à deux 2, représentant une valeur de 4.

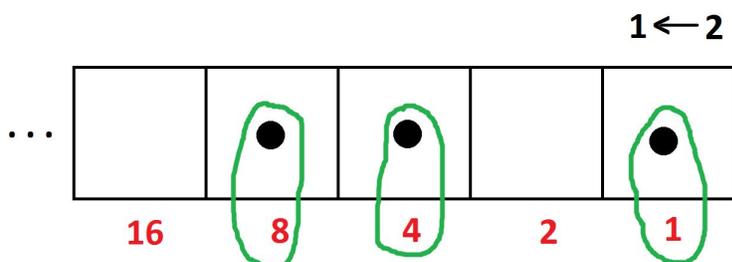
De même, l'explosion de deux 4 permet le déplacement d'un point d'une valeur de 8 vers la boîte voisine à gauche.



Voici une question à laquelle vous pouvez songer. Rappel : Mes solutions à toutes les questions figurent à la fin du chapitre.

1. La valeur d'un point dans la prochaine boîte vers la gauche est \quad . Comprenez-vous pourquoi? Quelles seraient les valeurs des points des boîtes suivantes vers la gauche?

Nous avons vu précédemment que le code associé au nombre treize est dans une machine $1 \leftarrow 2$ est 1101 . Maintenant, nous pouvons valider que cette réponse est tout à fait exacte : un 8 , un 4 , aucun 2 et un 1 donnent bien la somme de treize.



Nous nous étions également interrogés sur le nombre associé au code 10110 dans une machine $1 \leftarrow 2$. Nous pouvons manifestement voir que la valeur de ce code est celle-ci : $16 + 4 + 2 = 22$.

Voyez-vous que le code d'une machine $1 \leftarrow 2$ pour le nombre trente est 11110 ?

2. Quel nombre est associé au code 100101 dans une machine $1 \leftarrow 2$?
3. Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 2$ pour le nombre deux-cents?

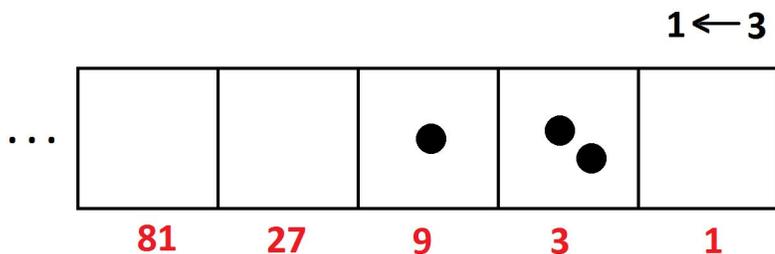
On désigne les codes d'une machine $1 \leftarrow 2$ comme des représentations **binaires** des nombres (le préfixe **bi-** signifie « deux »). On peut également utiliser le terme de représentations à **base deux**. Le système de numération en représentation binaire n'utilise que les symboles 0 et 1 pour l'écriture des nombres.

Les ordinateurs sont composés de commutateurs électriques activés ou désactivés. Il va donc naturellement de soi en informatique de chiffrer tous les calculs arithmétiques selon un code fondé seulement de deux symboles: c'est-à-dire 1 pour l'activation et 0 pour la désactivation. Par conséquent, le système de numération à base deux, ou binaire, est celle qui convient d'utiliser en informatique.

4. Dans une machine $1 \leftarrow 3$, trois points dans une boîte équivalent à un point déplacé d'une boîte vers la gauche. (De nouveau, chaque point situé dans la boîte à l'extrême droite équivaut à 3 .) Nous pouvons constater, dans cette machine, que la valeur de trois 1 égale 3 , que trois 3 est 9 , que trois 9 est 27 , et ainsi de suite.

- a) Quelle serait la valeur d'un point déplacé dans la boîte voisine à gauche des boîtes ci-dessus?

Nous avons vu plus tôt que le code associé à une machine $1 \leftarrow 3$ pour quinze est 120. Nous pouvons constater que cette réponse est exacte : un 9 et deux 3 donnent effectivement la somme de quinze.



- b) Pourrions-nous aussi affirmer que le code d'une machine $1 \leftarrow 3$ associé à quinze est 0120 ? En fait, convient-il d'utiliser des codes par zéro? Qu'en est-il des zéros figurant à fin des codes? Sont-ils facultatifs? Serait-il exact de supprimer le zéro à la fin du code 120 associé au nombre quinze et d'indiquer plutôt le code 12 ?
- c) Quel nombre est associé au code 21002 d'une machine $1 \leftarrow 3$?
- d) Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 3$ pour le nombre deux-cent?

Les codes d'une machine $1 \leftarrow 3$ sont désignés comme des représentations *ternaires* ou à *base trois* des nombres. Dans ce système, seuls les symboles 0, 1 et 2 servent à représenter les nombres.

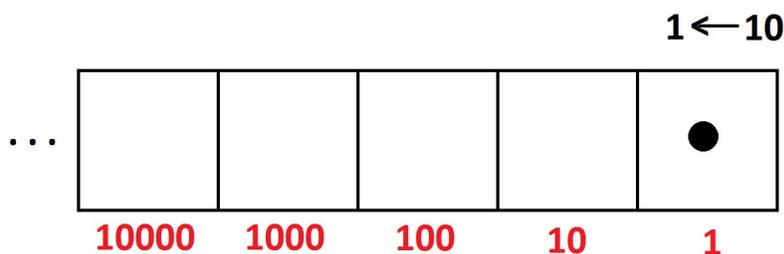
Certains discutent de la possibilité de fabriquer des ordinateurs optiques (ou photoniques) utilisant la lumière polarisée : la propagation de la lumière s'effectuerait sur le plan de façon parallèle, ou perpendiculairement, ou encore il n'y aurait aucune propagation de lumière. Pour ces ordinateurs, l'arithmétique à base trois serait le système notational approprié.

5.

- a) Dans une machine $1 \leftarrow 4$, quatre points dans une même boîte équivalent à un point déplacé dans la boîte voisine à gauche. Quelle est la valeur d'un point dans chacune des boîtes ci-dessous?
- b) Quel est le code d'une machine $1 \leftarrow 4$ associé au nombre vingt-neuf?

c) Quel nombre est associé au code 132 dans une machine $1 \leftarrow 4$?

En dernier lieu, dans le cas d'une machine $1 \leftarrow 10$, nous pouvons constater que dix points d'une valeur de un donnent 10, dix points d'une valeur de dix donnent 100, dix points d'une valeur de cent donnent 1000, et ainsi de suite. Les points situés dans les boîtes de droite à gauche d'une machine ont pour valeur un, dix, cent, mille, etc.



Nous avons déjà vu que le code associé au nombre 273 dans une machine $1 \leftarrow 10$ est 273, ce qui est une réponse tout à fait exacte : 273 représente deux centaines, sept dizaines et trois unités.

En fait, lorsque nous nous exprimons, nous le faisons conformément aux codes d'une machine $1 \leftarrow 10$.

Pour écrire en mots le nombre 273, certains francophones procèdent comme suit:

273 = deux-cent-septante-trois

Pour eux, la forme écrite représente carrément les valeurs dans chaque boîte, c'est-à-dire « deux CENTS », « septante » (le suffixe « ante » représente « dix ») et « trois ».

D'autres francophones utilisent plutôt la forme suivante:

273 = deux-cent-soixante-treize

Deux 100, six 10, treize 1.

C'est deux 100, sept 10, trois 1, à une explosion près!



Ainsi, cette histoire fautive sur les points et les boîtes nous a permis de nous familiariser avec la **valeur de position** et les **bases de numération** (base deux, base trois, base dix, etc.). Au sein de notre société, nous avons choisi d'utiliser le langage associé à la machine à base dix.

Selon vous, pourquoi la population a-t-elle privilégié la machine compter par base de dix ? Pourquoi aimons-nous

L'une des réponses à cette question pourrait se fonder sur la physiologie humaine : Les mains d'un humain comportent dix doigts. De nombreux historiens croient que cela pourrait fortement expliquer le penchant des humains envers la base dix.

6. Il semblerait que les Martiens ont des mains à six doigts. Quelle base croyez-vous que cette société serait portée à utiliser?

Sur notre planète, certaines cultures ont déjà utilisé la base vingt. D'après vous, pourquoi auraient-elles opté pour cette base?

En fait, nous pouvons remarquer les vestiges de la base vingt dans les cultures actuelles de l'Europe occidentale et des autres régions francophones. Par exemple, en français, le nombre 87 est prononcé et écrit **quatre-vingt-sept**. Aux États-Unis, le célèbre discours de Gettysburg commençait par : « Four score and seven years ago » (il y a de cela quatre-vingt-sept ans).

Bien, je crois que nous avons expliqué avec clarté le point de la leçon d'aujourd'hui. Nous avons abordé le système de numération à base dix et l'avons abordé en contexte de sa valeur de position. D'ailleurs, les humains affectionnent particulièrement la base dix étant donné les dix doigts de la main que la plupart d'entre nous avons.

Dans le cadre du prochain chapitre, nous nous lancerons dans des calculs arithmétiques, mais selon des méthodes nouvelles et sensationnelles!



EXPLORATIONS APPROFONDIES

Voici quelques « grandes questions » à explorer en profondeur ou en surface. Amusez-vous!

EXPLORATION 1 : LES MACHINES PEUVENT-ELLES « ÊTRE UTILISÉES DANS L'AUTRE SENS »?

Jacques décide de s'amuser avec une machine qui suit la règle $1 \leftarrow 1$. Il met un point dans la boîte à l'extrême droite. Que se passe-t-il? Supposez qu'il y a un nombre infini de boîtes vers la gauche.

$$1 \leftarrow 1$$



Suggi utilise une machine fonctionnant selon la règle $2 \leftarrow 1$. Elle place un point dans la boîte à l'extrême droite. Que se passe-t-il dans ce cas-ci?

Trouvez-vous ces machines intéressantes? Comportent-elles d'autres aspects à étudier?

EXPLORATION 2 : POUVONS-NOUS JOUER AVEC DE CURIEUSES MACHINES?

Pedro décide de jouer avec une machine qui suit la règle $2 \leftarrow 3$.

- a) Décrivez ce qui se produit lorsque trois points sont mis dans une boîte.
- b) Établissez les codes d'une machine associés aux nombres 1 à 30 . Remarquez-vous des tendances?
- c) Dans cette machine, le code associé au nombre dix est . Examinez maintenant le code que vous avez trouvé pour le nombre vingt. La réponse obtenue est-elle équivalente à celle de l'expression « dix plus dix »? De même, le code associé au nombre trente représente-t-il la réponse de l'expression « dix plus dix plus dix »?

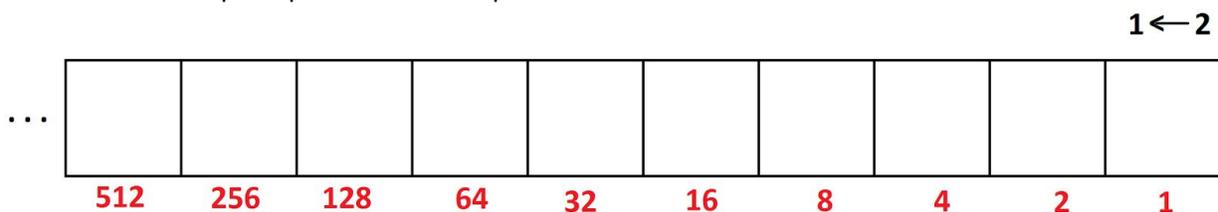
Commentaire : Nous étudierons plus en détail cette machine si particulière au chapitre 9. C'est vraiment bizarre!



SOLUTIONS

Comme convenu, voici mes solutions aux questions posées.

1. Voici les valeurs que représente un seul point dans chacune des boîtes ci-dessous.



Curieux de continuer cette chaîne logique?

2. Trente-sept.

3. 11001000

4.

a) Chaque point dans la boîte voisine à gauche équivaut à trois points d'une valeur de 81, ce qui donne 243.

b) Oui, on peut ajouter un zéro devant le code. Cela indiquerait qu'il n'y a pas de point d'une valeur de 27, ce qui est tout à fait exact. Par contre, la suppression du zéro à la fin du code est problématique. Le code est associé au nombre quinze (un 3 et deux 1), mais le code 12 est associé au nombre cinq (un 3 et deux 1).

c) Cent-quatre-vingt-onze. (Deux 81, un 27 et deux 1.)

d)

5.

a) Dans une machine $1 \leftarrow 4$, un point dans les boîtes équivaut aux valeurs suivantes :

b) Le nombre vingt-neuf est associé au code 131 dans une machine $1 \leftarrow 4$.

c) Trente. (Ce code est supérieur de un au code pour le nombre vingt-neuf!)

6. Les Martiens pourraient-ils utiliser une base douze? Cela signifierait qu'ils devraient faire appel à douze différents symboles pour écrire les nombres.

Au fait, avez-vous remarqué que nous utilisons dix différents symboles : 0 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 et 10 , qui représentent les caractères en numération décimale (en anglais, ces caractères sont désignés par « digits », mot aussi utilisé pour désigner les doigts de la main!)