



Uplifting Mathematics for All

ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ

ГЛАВА 3

СЪБИРАНЕ И УМНОЖЕНИЕ

Обществото обича да борава с десетичната бройна система. Така че нека се позанимаваме с $1 \leftarrow 10$ машината за известно време и нека започнем да осмисляме аритметиката, която обикновено учим в училище.

Вече видяхме как се записват числа. По-нататък, учениците обикновено се научават как да ги събират.

Нека започнем да изследваме събирането и да видим то до къде ще ни отведе.

СЪБИРАНЕ

Ето една задача за събиране: Пресметнете $251 + 124$. Такава задача обикновено се записва по следния начин.

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 124 \\ \hline \end{array}$$

Отговорът не е трудно да се сметне: $2 + 1$ прави 3 , $5 + 2$ прави 7 и $1 + 4$ прави 5 . Отговорът 375 се появява пред очите ни.

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 124 \\ \hline 375 \end{array}$$

Но дали забелязахте нещо любопитно, което току що направих? Аз работих от ляво надясно, точно както съм се учил да чета. Това обикновено е различно от това, което повечето хора са учили по математика: започнете от ляво и вървете надясно. Въпреки че ние вървахме в противоположната посока, нашият отговор 375 е напълно верен. (Проверка: Получавате ли същия отговор ако работите в другата посока?)

Тогава защо по математика са ни учили да работим от дясно наляво?

Много хора биха казали, че задачата, която решихме е “твърде приятна.” Ние трябва да решим една по-трудна задача за събиране, например $358 + 287$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline \end{array}$$

Добре. Нека го направим!

Ако отново започнем да вървим от ляво надясно, получаваме $3 + 2$ прави 5 ; $5 + 8$ прави 13 и $8 + 7$ прави 15 . Отговорът “петстотин тринадесетдесети и петнадесет” се появява пред очите ни. (Не забравяйте, че “стотин” е краткото име на стотици)

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline 5 | 13 | 15 \end{array}$$

Този отговор е абсолютно верен математически! Може да се уверите в това като го сметнете в една $1 \leftarrow 10$ машина. Ето как се записват 358 и 287 .

358	•••	•••	•••
+ 287	••	•••	•••
=	••	••••	••••
5 13 15			

Прибавяме 3 стотици и 2 стотици и наистина получаваме 5 стотици.

Прибавяме 5 десети и 8 десети и наистина получаваме 13 десети.

Прибавяме 8 единици и 7 единици и наистина получаваме 15 единици.

“Петстотин тринадесетдесети и петнадесет” е напълно верен отговор - дори го произнесох вярно. Ние наистина имаме 5 стотици, 13 десети, и 15 единици. Няма нищо математически неправилно в

този отговор. Той просто звучи странно. Обществото предпочита да не изговаряме числата по този начин.

Сега сме поставени пред следния въпрос:

Можем ли да поправим отговора, за да угодим на обществото – не на математиката – просто на обществото?

Отговорът е да! Можем да направим няколко експлозии. (Все пак работим с $1 \leftarrow 10$ машина.)

Нека експлодираме десет точки в средната кутия и ги заменим с една точка, едно място по-наляво.

$$\begin{array}{r}
 358 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 + 287 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad \cancel{5} \mid \cancel{13} \mid 15 \\
 \quad \quad \quad 6 \quad 3
 \end{array}$$

Сега отговорът “шестстотин тридесет и петнадесет” се появява пред очите ни. Той също е чудесен и математически верен отговор. Обаче обществото може да не се съгласи. Нека направим още една експлозия: десет точки в най-дясната кутия.

$$\begin{array}{r}
 358 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 + 287 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad \cancel{5} \mid \cancel{13} \mid \cancel{15} \\
 \quad \quad \quad 6 \quad \cancel{3} \quad 5 \\
 \quad \quad \quad \quad 4
 \end{array}$$

Сега виждаме отговора “шестстотин четиридесет и пет,” който е онзи, който обществото разбира.

Ето няколко задачи за упражнение, които можете да опитате да решите ако искате. Моите решения ще намерите в края на главата.

1. Напишете отговорите на следните задачи за събиране като работите от ляво надясно и без да се притеснявате за това какво обществото мисли! След това направете няколко експлозии за да преведете отговора, така че обществото да разбере.

$$\begin{array}{r} 148 \\ + 323 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 567 \\ + 271 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 377 \\ + 188 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 582 \\ + 714 \\ \hline = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 310462872 \\ + 389107123 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 87263716381 \\ + 18778274824 \\ \hline = \end{array}$$

ТРАДИЦИОННИЯТ АЛГОРИТЪМ

Можем ли да сравним този подход за събиране чрез точки и кутии със стандартният алгоритъм, който повечето хора знаят?

Нека се върнем обратно към примера $358 + 287$. Повечето хора са изненадани (и дори смутени) от простикият от ляво надясно отговор $5|13|15$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline 5|13|15 \end{array}$$

Това е така, защото традиционният алгоритъм ни задължава да работим от дясно наляво, гледайки първо $8 + 7$.

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	••••
=			•••• ••••

Но той ни казва да не записваме отговорът 15 . Вместо това, ние веднага експлодираме десет точки и записваме 5 в отговора, заедно с едно малко 1 , закрепено за средната колона. Хората наричат този процес *пренос на едно наум* и той – правилно – отговаря на добавяне на допълнителна точка в позицията на десетиците.

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	••••
=			•••••
=		•	••••

$$\begin{array}{r} 1 \\ 358 \\ + 287 \\ \hline 5 \end{array}$$

Сега да обърнем внимание на средните кутии. Събирайки ги получаваме 14 точки в кутията на десетиците ($5+8$ прави тринадесет точки, плюс една допълнителна точка от миналата експлозия).

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	••••
=		•••••	••••

И сега извършваме още една експлозия.

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	••••
=	•	•••	••••

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 358 \\ + 287 \\ \hline 45 \end{array}$$

На хартия, ние пишем “4” в отговора за позицията на десетиците, заедно с едно малко “1”, което слагаме над следващата колона. Това напълно съвпада с идеята на картинката с точки и кутии.

Сега завършете решението като прибавите точките в позицията на стотиците.

The left diagram shows the addition of 358 and 287 using a grid of boxes. The top row represents 358 (3 tens, 5 tens, 8 units) and the bottom row represents 287 (2 tens, 8 tens, 7 units). Red arrows point down from the units and tens columns to the result row, which shows 645 with orange dots indicating the carry-over process.

The right diagram shows the same addition in a standard format:
$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 358 \\ + 287 \\ \hline 645 \end{array}$$

Видяхме, че традиционният алгоритъм работи от дясно наляво и извършва експлозиите (“преносите едно наум”) когато се наложи. На хартия алгоритъмът изглежда бърз и компактен и може би това е причината през вековете да се превърне в предпочитания подход за събиране на големи числа.

Подходът с експлодиращи точки работи от ляво надясно, също както са ни учили да четем на Български и оставя всички експлозии за накрая. Той е лесен за прилагане и е посвоему забавен.

И двата подхода, разбира се, са хубави и вярни. Всеки човек си има собствен вкус и стил, според който може да избира кой да прилага. (А защо не някой от вас да измисли и започне да прилага напълно нов и верен подход!)

УМНОЖЕНИЕ

Нека продължим да си играем с $1 \leftarrow 10$ машината. Нека решим задача за умножение ... сега!

Имате по-малко от три секунди да напишете абсолютно верен бърз отговор на следната задача за умножение. Какъв би бил един добър отговор?

$$26417 \times 3$$

Можете ли да видите, че $6|18|12|3|21$, тоест, “шест десетохиляди, осемнадесет хиляди, дванадесет стотици, три десетици и двадесет и едно,” е верен отговор и може да се сметне бързо?

Ето какво се случва по-подробно.

Да започнем с картинка на 26417 в една $1 \leftarrow 10$ машина. (Може ли да пиша директно числа, вместо да рисувам точки?)

2	6	4	1	7
---	---	---	---	---

Ние трябва да утроим това число.

2	6	4	1	7	x 3
---	---	---	---	---	-----

В момента ние имаме 2 десетохиляди. Ако утроим това, получаваме 6 десетохиляди.
 В момента ние имаме 6 хиляди и утроявайки това получаваме 18 хиляди.
 Също така, 4 стотици се превръща в 12 стотици; 1 десетица се превръща в 3 десетици; и 7 единици се превръщат в 21 единици.

6	18	12	3	21
---	----	----	---	----

Виждаме отговорът “шест десетохиляди, осемнадесет хиляди, дванадесет стотици, три десетици и двадесет и едно” пред очите си. Напълно обоснован и математически верен!

А сега, как бихме поправили този отговор за обществото?

Като направим експлозии, разбира се!

Изглежда, че можем да експлодираме в какъвто ред си пожелаем. Можете ли да проследите следната верижна реакция?

$$6|18|12|3|21 = 6|19|2|3|21 = 6|19|2|5|1 = 7|9|2|5|1$$

Отговорът 79251 се появява пред очите ни.

2. Пресметнете: 26417×4 , 26417×5 и 26417×9 .

Пресметнете 26417×10 и обяснете защо отговорът трябва да бъде 264170. (Последното число изглежда като първото, но с една нула закачена за единия му край.)

Допълнителна задача: Бихте ли се пробвали с 26417×11 и 26417×12 ? (Отговорът може да е "Не! Това не ме интересува!")

УМНОЖЕНИЕ ПО ДЕСЕТ

Всъщност нека погледнем една от задачите за упражнение тук. *Защо отговорът на 26417×10 изглежда като първоначалното число с добавена една нула в края?*

Спомням си как в училище ни казваха да запомним следното правило: за да умножите по десет, сложете една нула накрая. Например,

$$37 \times 10 = 370$$

$$98989 \times 10 = 989890$$

$$100000 \times 10 = 1000000$$

и т.н.

Това наблюдение изглежда напълно разумно от гледна точка на подхода с кутиите и точките.

Ето как изглежда числото 26417 в една $1 \leftarrow 10$ машина.

2	6	4	1	7
---	---	---	---	---

А ето как изглежда 26417×10 .

20	60	40	10	70
----	----	----	----	----

А сега нека извършим експлозиите последователно. (За целта ще се нуждаем от допълнителна точка вляво.)

Имаме, че 2 групи от по десет експлодират и дават 2 точки едно място по-наляво, освен това 6 групи от по десет експлодират и дават 6 точки едно място по-наляво, 4 групи от по десет експлодират и дават 4 точки едно място по-наляво и т.н. Цифрите, с които работим, остават

същите. Всъщност виждаме, че общият ефект от всичко това е, че всички цифри се преместват една позиция по-наляво и оставят нула точки в най-дясната кутия - тази на единиците.

	20	60	40	10	70
2	0	60	40	10	70
2	6	0	40	10	70
2	6	4	0	10	70
2	6	4	1	0	70
2	6	4	1	7	0

Наистина, изглежда като че ли наистина закачихме една нула за десния край на числото 26417 . (Но всъщност това е така поради цялата серия от експлозии.)

3. а) Какъв е отговорът на 476×10 ? А на 476×100 ?
- б) Какъв е отговорът на $9190 \div 10$? А на $3310000 \div 100$?

ПО ЖЕЛАНИЕ: УМНОЖЕНИЕ НА ДВЕ ГОЛЕМИ ЧИСЛА

Възможно ли е да решим, да кажем, 37×23 , с точки и кутии?

Тук трябва да умножим три десетици по 23 и седем единици по 23 . Ако умеете да умножавате по 23 , отговорът е $3 \times 23 = 69$ десети и $7 \times 23 = 161$ единици. Следователно отговорът е $69|161$. След няколко експлозии, той се превръща в 851 .

Но този подход изглежда сложен! Той изисква от нас да знаем как да умножаваме по 23 .

Упражнение за мислене:

Сузи си помислила по задачата 37×23 за известно време и в крайна сметка нарисувала следната диаграма.

	6	14	0
+		9	21
=	6	23	21

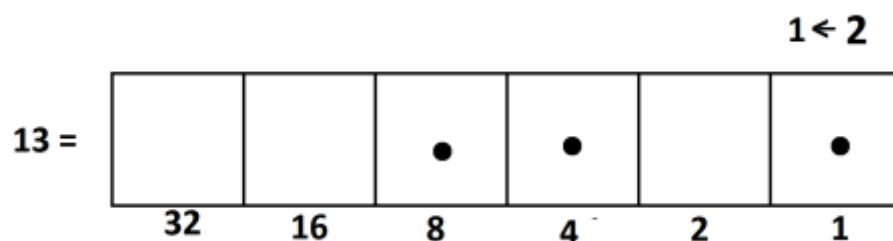
Това тя казала, че $37 \times 23 = 6 | 23 | 21 = 8 | 3 | 21 = 851$.

- a) Можете ли да разберете какво Сюзи е имала в предвид?
- b) Каква диаграма би нарисувала тя за 236×34 (и какъв отговор би получила)?
- c) Използвайки подхода на Сюзи, тогава дали задачите 37×23 и 23×37 водят до един и същ отговор? Очевидно ли е, докато извършвате процедурата, че те наистина водят? Дали 236×34 и 34×236 дават един и същ отговор чрез подхода на Сюзи?

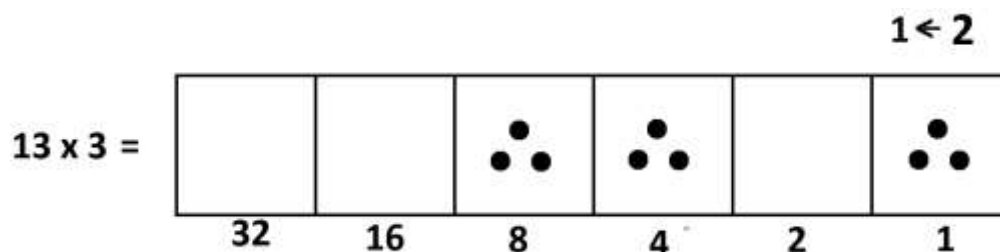
Ето още един забавен начин, по който да си представяте умножението. Нека този път работим с една $1 \leftarrow 2$ машина.

Нека сметнем 13×3 .

Ето как изглежда числото 13 в една $1 \leftarrow 2$ машина.



Ние трябва да утроим всичко. Значи трябва да заменим всяка точка, която видим, с три точки.

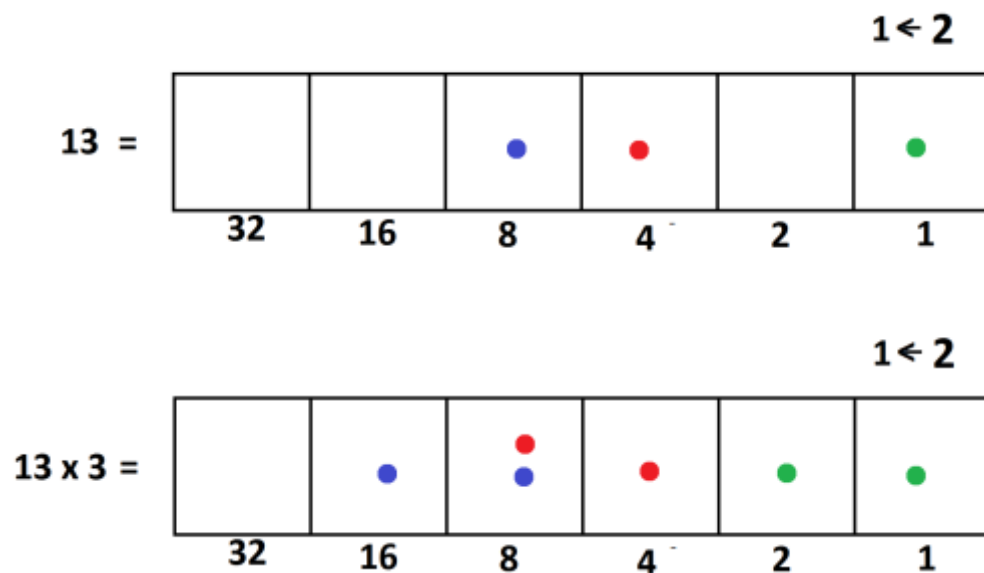


Сега можем да направим няколко експлозии и да видим как отговорът 39 се появява пред очите ни (което е 100111 в $1 \leftarrow 2$ машината).

От друга страна, ние можем да забележим, че три точки в една $1 \leftarrow 2$ машина всъщност изглеждат така.



Значи можем да заменим всяка точка в нашата картинка на числото 13 с една точка и още една в следващата кутия вляво. (Добавил съм малко цвят в картинката за по-лесно.)



Сега имаме да направим много по-малко експлозии и можем да видим как отговорът 100111 се появява пред очите ни.



ЗА ЩУРИ ИЗСЛЕДОВАТЕЛИ

Ето няколко “големи въпроса” за изследване, с който може да решите да се захванете, или поне да помислите по тях. Приятно забавление!

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 1: НЯМА НИЩО ПО-СПЕЦИАЛНО В ДЕСЕТИЧНАТА БРОЙНА СИСТЕМА ЗА СЪБИРАНЕ

Ето една задача за събиране в една $1 \leftarrow 5$ машина. (Тоест, това е задача в петична бройна система.) Това не е събиране в $1 \leftarrow 10$ машина.

$$\begin{array}{r} 20413 \\ + 13244 \\ \hline \end{array}$$

- a) Какъв е отговорът в $1 \leftarrow 5$ машината?
- b) Кое число има код 20413 в една $1 \leftarrow 5$ машина? Кое число има код 13244 в една $1 \leftarrow 5$ машина? Каква е сумата на тези две числа и какъв е кодът на тази сума в една $1 \leftarrow 5$ машина?

[Тук съм сложил отговорите, така че да можете да проверите умните си разсъждения.]

Сумата като задача в една $1 \leftarrow 5$ машина е

$$20413 + 13244 = 3|3|6|5|7 = 3|4|1|5|7 = 3|4|2|0|7 = 3|4|2|1|2 = 34212.$$

В една $1 \leftarrow 5$ машина, 20413 е две 625 -ици, четири 25 -ици, една 5 -ца и три 1 -ци, така че отговорът в десетична бройна система е 1358 ; 13244 е числото 1074 в десетична бройна система; и 34212 е числото 2432 в десетична бройна система. Току що ние решихме $1358 + 1074 = 2432$.

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 2: НЯМА НИЩО ПО-СПЕЦИАЛНО В ДЕСЕТИЧНАТА БРОЙНА СИСТЕМА ЗА УМНОЖЕНИЕ

Нека този път работим с една $1 \leftarrow 3$ машина.

- а) Намерете 111×3 като задача в троична бройна система. Също така, какъв е отговорът на 1202×3 и 2002×3 ?
Можете ли да обясните това, което забелязвате?

А сега, нека поработим с една $1 \leftarrow 4$ машина.

- б) Какъв е отговорът на 133×4 като задача в четвъртична бройна система? Какъв е отговорът на 2011×4 ? А на 22×4 ?
Можете ли да обясните това, което забелязвате?

Най-общо, работейки с една $1 \leftarrow b$ машина, можете ли да обясните защо умножението на едно число в b -ична бройна система по b ни дава първоначалното число с една нула, закачена за него вдясно?



РЕШЕНИЯ

Както ви обещах, тук са решенията на въпросите от преди малко.

1.

$$148 + 323 = 4 | 6 | 11 = 471$$

$$567 + 271 = 7 | 13 | 8 = 838$$

$$377 + 188 = 4 | 15 | 15 = 5 | 5 | 15 = 565$$

$$582 + 714 = 12 | 9 | 6 = 1 | 2 | 9 | 6 = 1296$$

$$310462872 + 389107123 = 6 | 9 | 9 | 5 | 6 | 9 | 9 | 9 | 5 = 699569995$$

$$87263716381 + 18778274824 = 9 | 15 | 9 | 13 | 11 | 9 | 8 | 10 | 11 | 10 | 5 \\ = \dots = 106041991205$$

2.

Имаме

$$26417 \times 4 = 8 | 24 | 16 | 4 | 28 = 10 | 4 | 16 | 4 | 28 = 1 | 0 | 4 | 16 | 4 | 28 = 1 | 0 | 5 | 6 | 4 | 28 = 105668$$

$$26417 \times 5 = 10 | 30 | 20 | 5 | 35 = 10 | 30 | 20 | 8 | 5 = 10 | 32 | 0 | 8 | 5 = 13 | 2 | 0 | 8 | 5 = 132085$$

$$26417 \times 9 = 18 | 54 | 36 | 9 | 63 = 18 | 54 | 36 | 15 | 3 = \dots = 237753$$

$$26417 \times 11 = 22 | 66 | 44 | 11 | 77 = \dots = 290587$$

$$26417 \times 12 = 24 | 72 | 48 | 12 | 84 = \dots = 317004$$

Прочетете малко по-нататък в главата, за да видите защо 26417×10 прави 264170 .

3.

а) 476×10 прави 4760 . Понеже 476×100 е “476 по десет по десет” отговорът е 47600 .

б) Имаме, че 9190 е отговорът на 919×10 . Това означава, че $9190 \div 10$ прави 919 .

и 3310000 е отговорът на 33100×100 , и освен това $3310000 \div 100$ прави 33100 .