

爆炸點子 第三章

加數和乘數

社會習慣使用十進製。所以讓我們一起使用 $1 \leftarrow 10$ 機器好好地理解我們通常在學校學習的算術。

我們剛剛看到如何編寫數字。下一步學生通常會學習如何把它們加起來。

我們從開始探索加數開始，然後從那裡繼續。

加數

這是一個加數問題。我們來計算 $251+124$ ，這樣的問題通常是這樣設置的。

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 124 \\ \hline \end{array}$$

這個加數問題很容易計算： $2+1$ 是 3 ， $5+2$ 是 7 ，而 $1+4$ 是 5 。出現答案 375 。

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 124 \\ \hline 375 \end{array}$$

但是，你注意到一些好奇的事情嗎？正如我被教導如何閱讀一樣，我從左到右計算。這通常與大多數人在數學課上所做的相反：從右到左。即使我們以相反的方向計算，我們的答案還是正確的。（檢查：如果我們以另一種方式計算，會得到相同的答案嗎？）

那麼為什麼在數學課上我們會被教導由右到左計算？

許多人認為我們剛剛做的問題是“太易了”，我們應該做一個更加困難的加數問題，就像 $358+287$

。

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline \end{array}$$

好的。我們開始做吧！

如果我們再次從左到右計算，我們得到； $3+2$ 是 5， $5+8$ 是並 13 還有 $8+7$ 是 15。出現了答案“五百三十五”。

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline 5 | 13 | 15 \end{array}$$

這個答案在數學上絕對正確！你可以在一台 $1 \leftarrow 10$ 機器上看到。這是 358 和 287。

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	•••••
=	•••	••••••	•••••••
5 13 15			

3個百加上2個百確實是5個百。

3個十加上8個十確實是13個十。

8個一加上7個一確實是15個一。

“五百三十五”是絕對正確的答案 - 我甚至說得對。我們確實有5個百，13個十和15個一。這個答案沒有數學上的錯誤。只是聽起來很奇怪，我們會這樣說數字。

所以現在的問題是：

為了社會的緣故，不是數學的緣故，我們可以修改這個答案嗎？

答案是肯定的！我們可以做一些爆炸。（畢竟這是一台 $1 \leftarrow 10$ 機器。）

讓我們在中間的箱子裡爆炸十個點，並在左邊的箱子裡用一個點替代它們。

$$\begin{array}{r}
 358 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 + 287 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{c} \cancel{5} \mid \cancel{13} \mid 15 \\ 6 \quad 3 \end{array}
 \end{array}$$

答案“六百三十五”現在出現了。這仍然是一個可愛的，數學上正確的答案。但是，整個社會可能不會同意。我們來做另外一個爆炸：最右邊的盒子裡有十個點。

$$\begin{array}{r}
 358 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 + 287 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{c} \cancel{5} \mid \cancel{13} \mid \cancel{15} \\ 6 \quad \cancel{3} \quad 5 \\ \quad \quad \quad 4 \end{array}
 \end{array}$$

現在我們看到社會所理解的答案，“六百四十五”。

以下是一些您想或不想嘗試的練習問題。我的解決方案出現在本章末尾。

1. 以左到右計算，寫出以下加數問題的答案，不用擔心社會的想法！然後，做一些爆炸，將每個答案翻譯成社會理解的東西。

$$\begin{array}{r} 148 \\ + 323 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 567 \\ + 271 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 377 \\ + 188 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 582 \\ + 714 \\ \hline = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 310462872 \\ + 389107123 \\ \hline = \end{array} \quad \begin{array}{r} 87263716381 \\ + 18778274824 \\ \hline = \end{array}$$

傳統算法

這個點和盒子的加數方法與大多數人都知道的標準算法相比，有什麼不同？

我們回到這個 $358 + 287$ 例子。大多數人對直接的從左到右的答案 $5|13|15$ 都會感到驚訝。

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline 5|13|15 \end{array}$$

這是因為傳統的算法使我們從右到左工作，首先看看 $8 + 7$ 。

$$\begin{array}{r}
 358 \\
 + 287 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

但是在算法中我們不寫下答案¹⁵。相反，我們立即爆炸十個點，並在答案行上寫上一個⁵，一個小的¹中間列。人們稱之為攜帶一個並且正確地對應於在十的位置上添加一個額外的點。

現在我們看看中間的盒子。在十位的盒子中添加¹⁴點（⁵+⁸得出十三個點，再加上之前爆炸的額外一個點）。

我們又進行了另一次爆炸。

$$\begin{array}{r}
 358 \\
 + 287 \\
 \hline
 = 645
 \end{array}$$

在紙上，我們在答案行的十位上寫下“4”，另一個“1”放在下一列中。這精確地匹配了點和盒子圖片的想法。

現在我們通過在百位加上點子來解決這個問題。

$$\begin{array}{r}
 358 \\
 + 287 \\
 \hline
 = 645
 \end{array}$$

因此，傳統的算法是右到左的，並且有爆炸的發生。在紙上，它是快速和緊湊的，這可能是為什麼它是幾個世紀以來的人們青睞的計算方式。

爆炸點的算法是從左到右，正如我們被教導如何閱讀英語一樣，並將所有爆炸結束。這是很容易理解和富樂趣的。

這兩種方法當然都是好的和正確的。這只是一個你個人風格的選擇。（你亦可以想出自己的新的正確的算法！）

乘法

讓我們繼續玩 $1 \leftarrow 10$ 機器。讓我們做一個乘法問題...現在開始！

你有不到三秒的時間寫下一個這個乘法問題的絕對正確快速答案。正確答案是什麼？

26417 x 3

你能看到 $6|18|12|3|21$ 嗎，那就是“六個萬，十八個千，十二個百，三個十，二十一”，是正確的，快速的算法嗎？

這是怎麼回事

我們從一台 $1 \leftarrow 10$ 機器上開始一張26417的圖片。（如果我只是寫數字而不是畫點，可以嗎？）

2	6	4	1	7
---	---	---	---	---

我們被要求將這個數字乘三倍。

2	6	4	1	7	x 3
---	---	---	---	---	-----

現在我們有 2 個萬。如果我們乘三倍，我們就有 6 個萬。

現在我們有 6 個千，乘三倍會有 18 個千。

而且，4 個百變成 12 個百；1 個十變成 3 個十；還有 7 個一變成 21 個一。

6	18	12	3	21
---	----	----	---	----

我們看到答案是“六個萬，十八個千，十二個百，三個十，二十一”。絕對堅實，數學上正確！

現在，我們怎麼才能為社會解決這個答案？

當然是做一些爆炸！

我們可以按照我們喜歡的任何順序展開爆炸。你能跟隨這一連串的事件嗎？

$$6|18|12|3|21 = 7|19|2|3|21 = 6|19|2|5|1 = 7|9|2|5|1$$

答案 79251 出現。

2. 計算以下各項： 26417×4 ， 26417×5 ，和 26417×9 。

計算 26417×10 和解釋為什麼答案必須是 264170 。（這個答案看起來像原來的數字，只是最後的數字為零）。

額外：還想要計算 26417×11 和 26417×12 嗎？（答案可以是不想！）

乘十

讓我們在這裡回答一個練習題。為什麼 26417×10 的答案看起來要像原來的數字加上一個零呢？

我記得在學校裡教過這個規則：乘十就是把零上加。例如，

$$37 \times 10 = 370$$

$$98989 \times 10 = 989890$$

$$100000 \times 10 = 1000000$$

等等。

這種觀察在點和盒子思考中是非常有意義的。

這是在 $1 \leftarrow 10$ 機器中的數字 26417 。

2	6	4	1	7
---	---	---	---	---

這是 26417×10 。

20	60	40	10	70
----	----	----	----	----

現在讓我們進行一次爆炸。（我們在左邊需要一個額外的盒子。）

我們有2組十位的的爆炸，在左邊的盒子得出2個點，然後6組十位的的爆炸在左邊的盒子得出6個點，然後4組十位的的爆炸在左邊的盒子得出4個點，等等。我們看不到數字的變化。事實上，我們看到的淨效果看起來像所有的數字“移動”到左邊的盒子，並在原來的地方留下一個零。

	20	60	40	10	70
2	0	60	40	10	70
2	6	0	40	10	70
2	6	4	0	10	70
2	6	4	1	0	70
2	6	4	1	7	0

的確，看起來我們剛剛在 26417 最右邊加了一個零。（但這真的是因為很多次爆炸。）

3. a) 476×10 的答案是什麼？ 476×100 的答案呢？
 b) $9190 \div 10$ 的答案是什麼？ $3310000 \div 100$ 的答案呢？

自選的：長乘數

有可能用點和盒子來找出 37×23 的答案嗎？

在這裡，我們被要求計算三個十乘 23 和七個一乘 23 。如果你對 23 的倍數很熟，那就會知道 $3 \times 23 = 69$ 個和 $7 \times 23 = 161$ 個一。所以答案是 $69|161$ 。隨著爆炸，這變成了 851。

但這種做法似乎很難！它需要你知道 23 的倍數。

思維練習：

Suzzy 想了 37×23 一會兒，她最後畫了下面的圖表。

	6	14	0
+		9	21
=	6	23	21

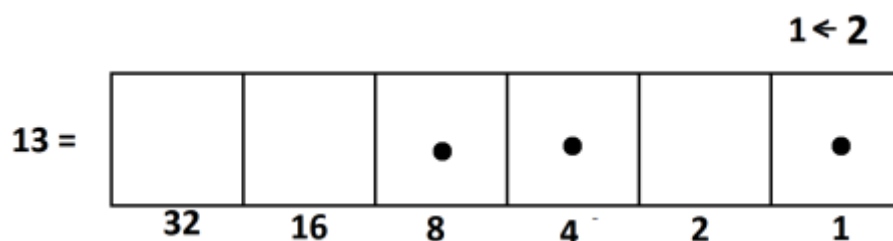
然後她說 $37 \times 23 = 6 | 23 | 21 = 8 | 3 | 21 = 851$ 。

- a) 你可以弄清楚Suzzy在想什麼嗎？
- b) 你覺得Suzzy可能會為 236×34 採用什麼圖表（以及從中得到什麼答案）？
- c) 使用Suzzy的方法做 37×23 和 23×37 會得到同樣的答案嗎？通過這個步驟是否顯而易見？在Suzzy的做法中 236×34 和 34×236 會得到同樣的答案嗎？

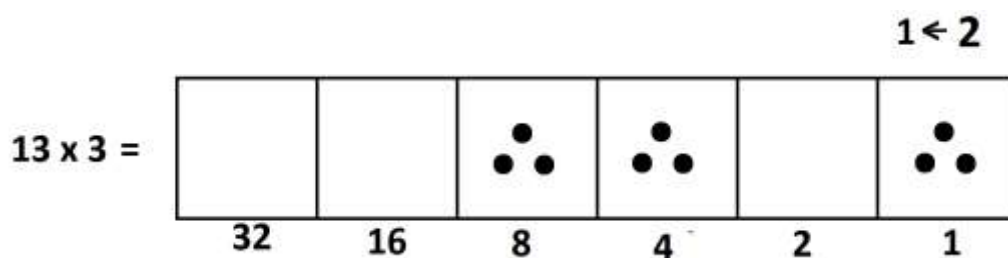
這是另一種有趣的方法來思考乘法。這次我們和 $1 \leftarrow 2$ 機器一起工作

我們來計算 13×3 。

這是 13 在 $1 \leftarrow 2$ 機器中的樣子。

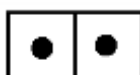


我們被要求將所有事物乘三倍。所以我們看到的每一個點都要用三個點代替。

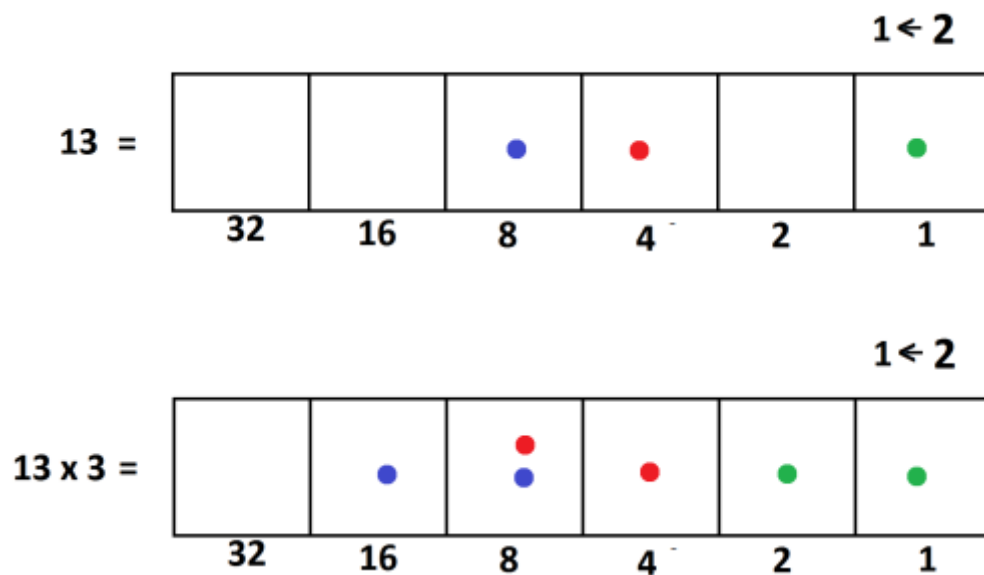


現在我們可以做一些爆炸來看看³⁹答案出現（這是在 $1 \leftarrow 2$ 機器中的 100111 ）。

或者，我們可以注意到， $1 \leftarrow 2$ 機器中的三個點實際上是這樣的。



所以我們可以把¹³圖像中的每一個點替換成一個點，加上另一個點在左邊的盒子。（我已經在圖片上添加了一些顏色來幫助理解。）



現在有了更少的爆炸要做，我們看到答案 100111 出現了。



探索

以下是您可能想要探索的一些“大問題”，或者只是想一想。開心一下！

探索1：十進制加法是沒有什麼特別的

這是 $1 \leftarrow 5$ 機器中的另外一個加法問題。（也就是說，這是一個五進制的問題。）這不是 $1 \leftarrow 10$ 機器加法。

$$\begin{array}{r} 20413 \\ + 13244 \\ \hline \end{array}$$

- $1 \leftarrow 5$ 機器的答案是什麼？
- 什麼號碼在 $1 \leftarrow 5$ 機器上的代碼是20413？什麼號碼在 $1 \leftarrow 5$ 機器上的代碼是13244？這兩個數字的總和是多少，它們在 $1 \leftarrow 5$ 機器中的代碼總和是多少？

[這是答案，所以你可以檢查你的聰明想法。

總和，作為一個 $1 \leftarrow 5$ 機器問題，是

$$20413 + 13244 = 3|3|6|5|7 = 3|4|1|5|7 = 3|4|2|0|7 = 3|4|2|1|2 = 34212$$

在一台 $1 \leftarrow 5$ 機器上，20413是二個625，四個25，一個5，三個1，和十進制數字1358一同的；13244是1074的十進制數字；34212是2432的十進制數字。我們剛剛解決了 $1358 + 1074 = 2432$ 。]

探索2：十進制乘法是沒有什麼特別的

讓我們使用一台 $1 \leftarrow 3$ 機器

- 作為一個三進制的問題， 111×3 是？。還有 1202×3 和 2002×3 ？你能解釋一下你注意到什麼嗎？

讓我們使用一台 $1 \leftarrow 4$ 機器

- b) 作為一個四進制的問題, 133×4 是? 還有 2011×4 和 22×4 ?
你能解釋一下你注意到什麼嗎?

一般來說, 如果我們正在使用 $1 \leftarrow b$ 機器, 你能否解釋為什麼以 b 乘一個 b 進制的數字, 會變回原來的數字, 最後在右邊加上一個零?



解決方案

如所承諾的，這是我提出的問題的解決方案。

1.

$$148 + 323 = 4 | 6 | 11 = 471$$

$$567 + 271 = 7 | 13 | 8 = 838$$

$$377 + 188 = 4 | 15 | 15 = 5 | 5 | 15 = 565$$

$$582 + 714 = 12 | 9 | 6 = 1 | 2 | 9 | 6 = 1296$$

$$310462872 + 389107123 = 6 | 9 | 9 | 5 | 6 | 9 | 9 | 9 | 5 = 699569995$$

$$87263716381 + 18778274824 = 9 | 15 | 9 | 13 | 11 | 9 | 8 | 10 | 11 | 10 | 5 \\ = \dots = 106041991205$$

2.

我們有

$$26417 \times 4 = 8 | 24 | 16 | 4 | 28 = 10 | 4 | 16 | 4 | 28 = 1 | 0 | 4 | 16 | 4 | 28 = 1 | 0 | 5 | 6 | 4 | 28 = 105668$$

$$26417 \times 5 = 10 | 30 | 20 | 5 | 35 = 10 | 30 | 20 | 8 | 5 = 10 | 32 | 0 | 8 | 5 = 13 | 2 | 0 | 8 | 5 = 132085$$

$$26417 \times 9 = 18 | 54 | 36 | 9 | 63 = 18 | 54 | 36 | 15 | 3 = \dots = 237753$$

$$26417 \times 11 = 22 | 66 | 44 | 11 | 77 = \dots = 290587$$

$$26417 \times 12 = 24 | 72 | 48 | 12 | 84 = \dots = 317004$$

請閱讀本章，了解 26417×10 是 264170 的原因

3.

a) 476×10 is 4760. 因為 476×100 是“476 乘十再乘十”答案會是 47600.

b) 919×10 , 我們有答案 9190。這意味著 $9190 \div 10$ 一定是 919。

3310000 是 33100×100 的答案，所以 $3310000 \div 100$ 一定是 33100。