DES POINTS QUI EXPLOSENT
CHAPITRE 3

ADDITION ET MULTIPLICATION

La société adore utiliser le système de numération à base dix. Nous allons donc nous concentrer sur une machine $1 \leftarrow 10$ pour un certain temps afin de bien saisir les calculs arithmétiques que nous apprenons habituellement à l'école.

Nous venons d'aborder la façon d'écrire les nombres. Ensuite, les élèves apprennent généralement à les additionner.

Commençons par explorer le concept de l'addition, puis nous partirons de ces notions.

ADDITION

Voici une addition : $251+124$. Ce type de calcul s'écrit habituellement comme suit.

Cette addition est facile à calculer : $2+1$ égale ; $5+2$ égale ; et égale . La réponse est 375 .

Mais venez-vous de constater quelque chose de curieux? J'ai fait le calcul de gauche à droite, de la même façon que j'ai appris à lire. D'ordinaire, nous apprenons justement à faire le comprendre en mathématiques, c'est-à-dire d'aller de la droite vers la gauche. Bien que nous ayons fait le calcul en sens inverse, la réponse 375 est exacte. (Faites le test : Obtenez-vous la même réponse si vous faites le calcul dans l’autre sens?)

Pourquoi nous a-t-on alors enseigné à faire le calcul de la droite vers la gauche dans nos cours de mathématiques?

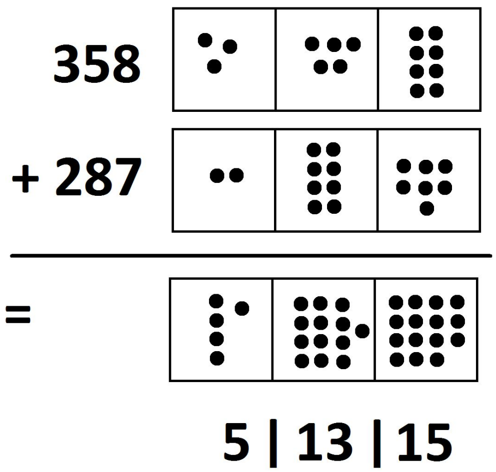
Bon nombre de personnes suggèrent que le problème que nous venons de voir était tout simplement « trop commode ». Peut-être devrions-nous nous attaquer à une addition plus particulière, comme $358+287$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ +\,287 \\ \hline \end{array}$$

D’accord. Allons-y!

Si nous faisons de nouveau le calcul de gauche à droite, nous obtenons ce qui suit : $3+2$ égale 5 ; $5+8$ égale ; et $8+7$ égale 15 . La réponse est « cinq-cent-”treizante”-quinze ». (Souvenez-vous que le suffixe « ante » signifie *dix*.)

Et cette réponse est totalement exacte en mathématiques! Vous pouvez voir que le calcul se fait dans une machine . Voici comment sont illustrés les nombres 358 et 287 .



La somme de centaines et de 2 centaines égale vraiment centaines.

La somme de 5 dizaines et de dizaines égale vraiment 13 dizaines.

La somme de 8 unités et de 7 unités égale vraiment 15 unités.

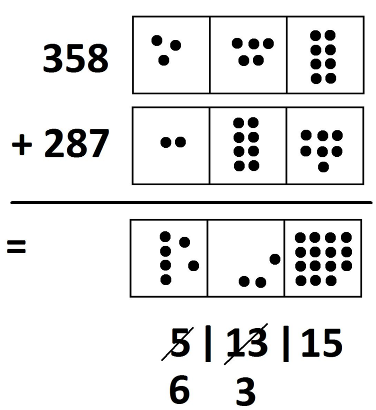
« Cinq-cent-"treizante"-quinze » est une réponse absolument exacte – et je le prononce même correctement. Nous avons bien 5 centaines, 13 dizaines et 15 unités. Mathématiquement, il n'y a rien d'inexact dans cette réponse. Toutefois, ça sonne simplement bizarre. La société préfère que nous n'exprimions pas les nombres de cette façon.

Ainsi, la question suivante se pose :

Pouvons-nous modifier la réponse simplement pour nous conformer à la société – et non pour faciliter les choses mathématiquement parlant?

La réponse est oui! Nous pouvons faire quelques explosions. (Après tout, c'est une machine $1 \leftarrow 10$.)

Faisons exploser dix points dans la boîte du milieu, qui donnent un point, dans la boîte voisine à gauche.



Nous obtenons maintenant la réponse « six-cent-”trois-ante”-quinze ». Là encore, il s’agit d’une réponse d’une exactitude tout à fait adorable. Cependant, l’ensemble de la société la désapprouverait. Procédons à une autre explosion : dix points dans la boîte à l’extrême droite.

La réponse obtenue est « six-cent-”quatr-ante-cinq” », et celle-ci peut être comprise par la société. (Bien qu’en français, on écrirait plutôt *quarante*.)

Voici quelques exercices que vous pouvez tenter de faire. Mes solutions à ceux-ci se trouvent à la fin du chapitre.

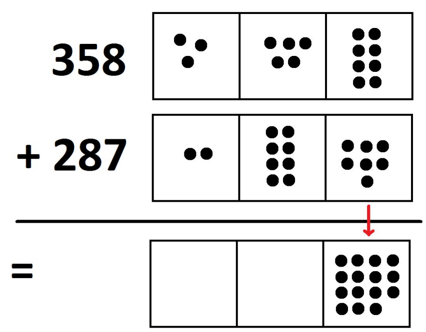
> **1.** Indiquez les réponses aux additions suivantes en allant de la gauche vers la droite, sans vous soucier de ce que la société en penserait! Ensuite, faites quelques explosions pour traduire chacune des réponses en une version compréhensible par la société.

L’ALGORITHME TRADITIONNEL

Comment cette approche fondée sur l’utilisation de boîtes et de points se compare-t-elle à l’algorithme standard que la plupart d’entre nous connaissent?

Prenons de nouveau l'opération $358+287$. La plupart des personnes seront surprises (et même perturbées) par la réponse directement obtenue du calcul effectué de la gauche vers la droite $5\,|\,13\,|\,15$.

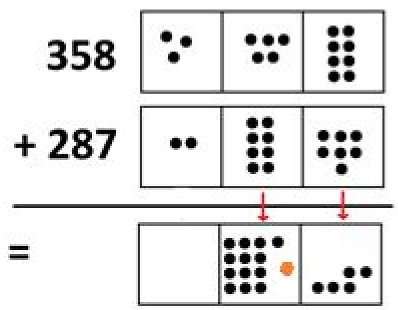
Cela s'explique par le fait que selon l'algorithme traditionnel, nous devons plutôt faire le calcul de la droite vers la gauche, en commençant par $8+7$.



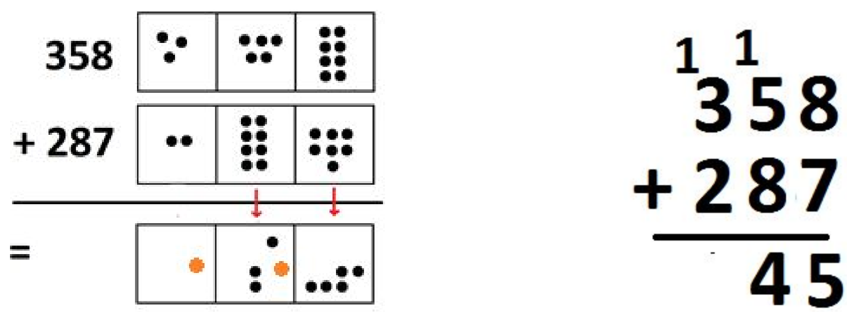
Cependant, en utilisant l'algorithme, nous n'écrivons pas la réponse 15 . En fait, nous procédons plutôt immédiatement à l'explosion de dix points et écrivons 5 sous la ligne, ainsi qu'un petit 1 au-dessus de la colonne de chiffres du milieu. On indique qu'il s'agit d'une *retenue de un* et cela équivaut – exactement – à ajouter un point à la position des dizaines.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 358 \\ +\,287 \\ \hline 5 \end{array}$$

Concentrons-nous maintenant sur la boîte du milieu. L'addition donne 14 points dans la boîte des dizaines (égale treize points, plus le point retenu de l'explosion précédente).

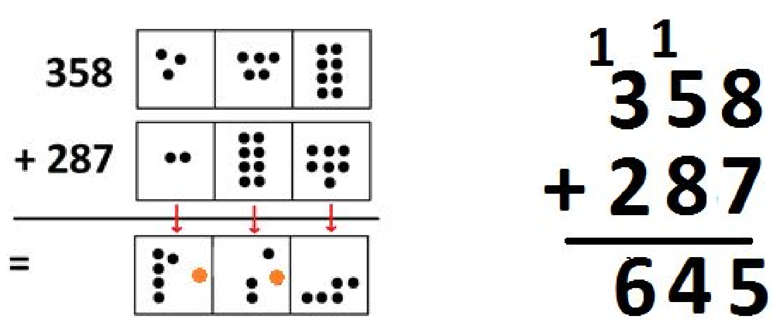


Et nous effectuons une autre explosion.



Sur papier, on écrirait 4 à la position des dizaines, en dessous de la ligne, et un petit 1 au-dessus la colonne suivante à gauche. Cela correspond exactement au principe démontré dans l'illustration des boîtes et des points ci-dessus.

En dernier lieu, nous terminons l'addition en ajoutant les points à la position des centaines.



Ainsi, l’algorithme traditionnel s’effectue de la droite vers la gauche et entraîne des explosions (ou « reporte » des valeurs) au fur et à mesure du calcul. Sur papier, le calcul est rapide et prend peu d’espace, ce qui explique probablement pourquoi cette méthode d’addition a été privilégiée pendant des siècles.

Quant à l’approche des points qui explosent, elle s’effectue de la gauche vers la droite, tout comme on nous enseigne à lire en français, et garde toutes les explosions pour la fin. C’est facile à comprendre et assez amusant.

Bien sûr, ces deux approches sont valides et exactes. Le choix de l’approche est en fonction des goûts et du style personnel de chacun. (N’hésitez pas à trouver, vous aussi, une nouvelle approche exacte!)

MULTIPLICATION

Amusons-nous avec la machine $1 \leftarrow 10$ en nous penchant sur une multiplication… maintenant!

Vous disposez de moins de trois secondes pour écrire rapidement une réponse tout à fait exacte à cette multiplication. En quoi consiste une bonne réponse?

26417 x 3

Saisissez-vous que $6\,|\,18\,|\,12\,|\,3\,|\,21$, c’est-à-dire « six dizaines de milliers, dix-huit milliers, douze centaines, “trois-ante” et vingt-et-une unités », est une réponse exacte que vous pouvez trouver rapidement?

Voici ce qui se passe.

Commençons par illustrer 26417 dans une machine $1 \leftarrow 10$. (Puis-je seulement inscrire des chiffres au lieu de faire des points?)

2	**6**	**4**	**1**	**7**

Nous devons tripler ce nombre.

2	**6**	**4**	**1**	**7**	**x 3**

En ce moment, nous avons dizaines de milliers. Si nous triplons cette valeur, nous obtenons 6 dizaines de milliers.

En multipliant par trois 6 milliers, nous obtenons 18 milliers.

De même, 4 centaines égalent 12 centaines; dizaine égale 3 dizaines; et 7 unités égalent 21 unités.

6	**18**	**12**	**3**	**21**

La réponse est donc « soixante milliers, dix-huit milliers, douze centaines, “trois-ante” et vingt-et-une unités », ce qui est mathématiquement absolument exact!

Maintenant, pouvons-nous adapter cette réponse pour en fonction de la société?

Faisons quelques explosions, bien sûr!

Il semble que nous pouvons faire exploser les valeurs dans n’importe quel ordre. Parvenez-vous à suivre cette chaîne d’événements?

$$6\,|\,18\,|\,12\,|\,3\,|\,21 \;=\; 6\,|\,19\,|\,2\,|\,3\,|\,21 \;=\; 6\,|\,19\,|\,2\,|\,5\,|\,1 \;=\; 7\,|\,9\,|\,2\,|\,5\,|\,1$$

La réponse obtenue est .

2. Calculez chacune des opérations suivantes : 26417×4 ; 26417×5 ; et 26417×9 .

Calculez 26417×10 et expliquez pourquoi la réponse doit être 264170 . (La réponse semble simplement être le nombre initial, avec un zéro ajouté à la fin.)

Exercice supplémentaire : Ça vous dit de faire également les opérations 26417×11 et 26417×12 ? (Vous avez le droit de répondre « Non! Ça ne me dit pas du tout! »)

MULTIPLICATION PAR DIX

En fait, répondons ici à l’une des questions des exercices pratiques. *Pourquoi la réponse à l’opération semble-t-elle être simplement le nombre initial, avec un zéro ajouté à la fin?*

Je me souviens avoir appris cette règle à l’école : pour multiplier par dix, il suffit d’ajouter un zéro à la fin. Par exemple,

$$37 \times 10 = 370$$
$$98989 \times 10 = 989890$$
$$100000 \times 10 = 1000000$$

et ainsi de suite.

Cette observation est tout à fait logique selon l’approche des points et des boîtes.

Examinons de nouveau le nombre 26417 dans une machine .

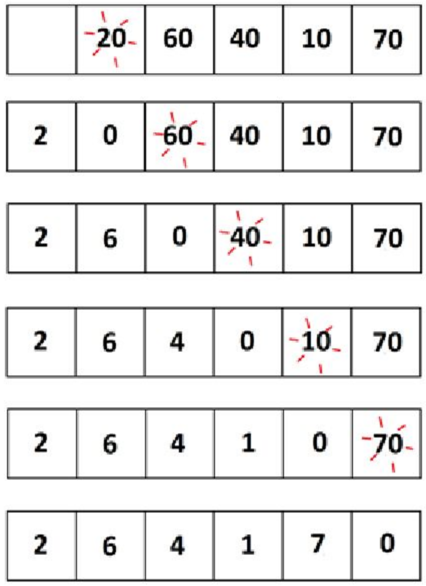
2	**6**	**4**	**1**	**7**

Voici 26417×10 .

20	**60**	**40**	**10**	**70**

Procédons maintenant aux explosions, l’une après l’autre. (Nous aurons besoin d’une boîte supplémentaire vers la gauche.)

Nous avons 2 groupes de dix qui explosent afin de créer points dans la boîte voisine à gauche; 6 groupes de dix qui explosent pour donner 6 points dans la boîte voisine à gauche; 4 groupes de dix qui explosent pour donner 4 points dans la boîte voisine à gauche; etc. Les chiffres avec lesquels nous travaillons restent les mêmes. En somme, ce calcul a pour effet de déplacer chacun des chiffres d’une boîte vers la gauche, en ne laissant aucun point dans la boîte des unités.



Il semble que tout ce que nous avons fait, c'est d'ajouter un zéro à la fin du nombre 26417 .
(Cependant, cela est le résultat de nombreuses explosions.)

3. a) Quelle doit être la réponse à 476×10 ? À 476×100 ?

b) Quelle doit être la réponse à ? À $3310000 \div 100$?

FACULTATIF : MULTIPLICATION LONGUE

Est-il possible de calculer, par exemple, 37×23 au moyen de points et de boîtes?

Cette opération nous exige de multiplier trois dizaines par 23 et sept unités par 23 . Si vous maîtrisez bien les multiples de , vous obtiendrez $3 \times 23 = 69$ dizaines et unités. La réponse est donc $69 \mid 161$. Après les explosions, le résultat est 851 .

Cependant, cette approche semble complexe! Elle vous exige de connaître les multiples de 23 .

Exercice de raisonnement :

Suzzy a songé un certain temps à l'opération 37×23 , puis a fini par dessiner le diagramme suivant.

Elle a ensuite déclaré que $37 \times 23 = 6 \mid 23 \mid 21 = 8 \mid 3 \mid 21 = 851$.

a) Comprenez-vous le raisonnement de Suzzy?

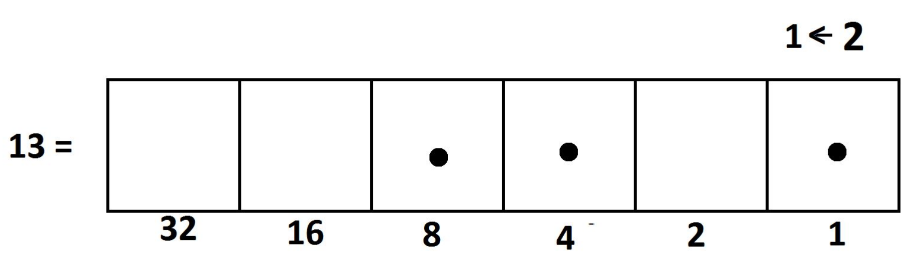
b) Selon vous, quel diagramme Suzzy devrait-elle dessiner pour l'opération 236×34 (et quelle réponse obtiendrait-elle)?

c) Selon l'approche de Suzzy, les opérations 37×23 et donnent-elles la même réponse? Est-ce évident tout au long du processus qu'elles le feront? Toujours selon l'approche de Suzzy, est-ce que 236×34 et 34×236 donnent la même réponse?

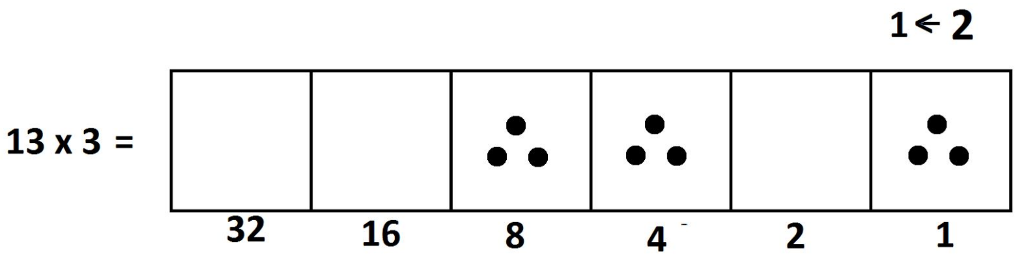
Voici une autre façon divertissante de se pencher sur la multiplication. Cette fois, nous utiliserons une machine $1 \leftarrow 2$.

Calculons 13×3 .

Voici comment le nombre est illustré dans une machine $1 \leftarrow 2$.

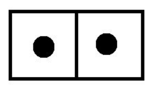


Nous devons tripler chaque valeur. Ainsi, nous pouvons voir trois points au lieu d'un point dans les mêmes boîtes.

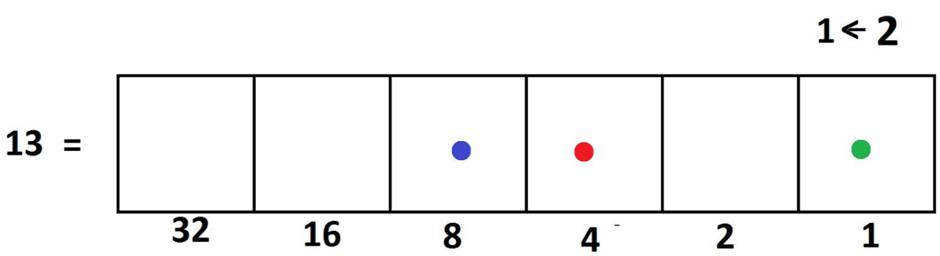


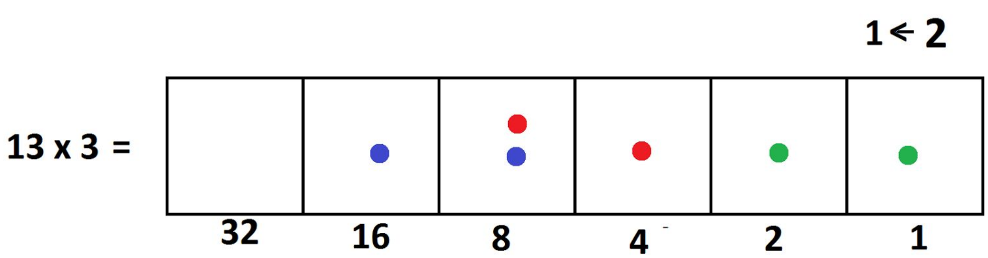
Nous pouvons ensuite faire quelques explosions qui permettent d'obtenir la réponse 39 (qui est représentée par le code 100111 dans la machine $1 \leftarrow 2$).

Nous pouvons aussi constater que lorsque nous plaçons trois points dans une machine $1 \leftarrow 2$, ils sont illustrés comme suit.



Par conséquent, au lieu de chaque point indiqué dans les boîtes de l'illustration du nombre , nous pouvons conserver un point dans la boîte et ajouter un point dans la boîte voisine à gauche. (J'ai ajouté des couleurs à l'illustration pour faciliter la compréhension.)





Maintenant que nous avons réduit le nombre d'explosions requises, nous obtenons la réponse 100111 .

EXPLORATIONS APPROFONDIES

Voici quelques « grandes questions » à explorer en profondeur ou en surface. Amusez-vous!

EXPLORATION 1 : IL N'Y A RIEN DE PARTICULIER À NOTER EN MATIÈRE D'ADDITION AVEC LA BASE DIX

Voici une addition à calculer dans une machine $1 \leftarrow 5$ (c'est-à-dire une opération en base cinq) et non dans une machine $1 \leftarrow 10$.

$$\begin{array}{r} 20413 \\ +\ 13244 \\ \hline \end{array}$$

a) Quelle est la réponse obtenue dans une machine $1 \leftarrow 5$?

b) Quel est le nombre associé au code 20413 dans une machine $1 \leftarrow 5$? Et le nombre associé au code 13244 dans une machine $1 \leftarrow 5$? Quelle est la somme de ces deux nombres et quel est le code associé à cette somme dans une machine $1 \leftarrow 5$?

[Voici les réponses afin de vous permettre de vérifier votre raisonnement ingénieux.

Dans le cadre d'une opération dans une machine $1 \leftarrow 5$, la somme est

.

Dans une machine $1 \leftarrow 5$, 20413 représente deux valeurs de 625 , quatre valeurs de 25 , une valeur de et trois valeurs de 1 , ce qui équivaut au nombre 1358 en base dix; le code représente le nombre 1074 en base dix; et le code représente le nombre 2432 en base dix. Nous venons d'établir que $1358 + 1074 = 2432$.]

EXPLORATION 2 : LA MULTIPLICATION AVEC LA BASE DIX N'EST PAS SI PARTICULIÈRE

Utilisons une machine .

a) Trouvez le résultat de en base trois. Trouvez également les réponses de 1202×3 et de 2002×3 ?
Pouvez-vous expliquer ce que vous constatez?

Utilisons maintenant une machine .

b) Quel est le résultat de 133×4 en base quatre? Que donne 2011×4 ? Que donne 22×4 ?
Pouvez-vous expliquer ce que vous constatez?

En général, si nous utilisons une machine $1 \leftarrow b$, pouvez-vous expliquer pourquoi la multiplication d'un nombre en b par b égale le nombre initial avec un zéro ajouté à la fin?

SOLUTIONS

Comme convenu, voici mes solutions aux questions posées.

1.

$$148+323=4\,|\,6\,|\,11=471$$

$$567+271=7\,|\,13\,|\,8=838$$

$$377+188=4\,|\,15\,|\,15=5\,|\,5\,|\,15=565$$

$$582+714=12\,|\,9\,|\,6=1\,|\,2\,|\,9\,|\,6=1296$$

$$310462872+389107123=6\,|\,9\,|\,9\,|\,5\,|\,6\,|\,9\,|\,9\,|\,9\,|\,5=699569995$$

2.

Nous avons

$$26417\times 4=8\,|\,24\,|\,16\,|\,4\,|\,28=10\,|\,4\,|\,16\,|\,4\,|\,28=1\,|\,0\,|\,4\,|\,16\,|\,4\,|\,28=1\,|\,0\,|\,5\,|\,6\,|\,4\,|\,28=105668$$
$$26417\times 5=10\,|\,30\,|\,20\,|\,5\,|\,35=10\,|\,30\,|\,20\,|\,8\,|\,5=10\,|\,32\,|\,0\,|\,8\,|\,5=13\,|\,2\,|\,0\,|\,8\,|\,5=132085$$
$$26417\times 9=18\,|\,54\,|\,36\,|\,9\,|\,63=18\,|\,54\,|\,36\,|\,15\,|\,3=\ldots=237753$$

Lisez le chapitre pour comprendre pourquoi donne 264170.

3.

a) 476×10 donne 4760. Puisque équivaut à fois dix fois dix, la réponse est 47600.

b) Nous avons établi que 9190 équivaut à 919×10. Cela signifie que $9190 \div 10$ doit être 919.

Et 3310000 est la réponse à , de même que $3310000 \div 100$ doit donner 33100.