

爆炸點子 第四章

減法

讓我們繼續使用 $1 \leftarrow 10$ 機器。

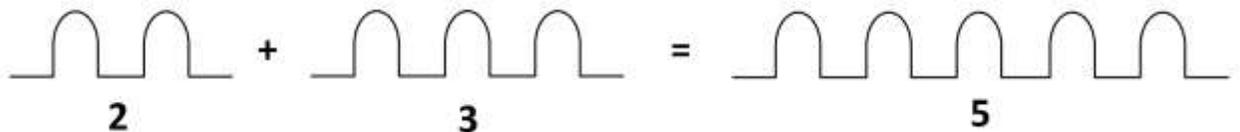
到目前為止，我們已經有了加法和乘法的概念。但是我們跳過了減法。為什麼？因為我不相信減法！對我來說，減法只是加法的相反。

我們來探討一下這個意思。

負數

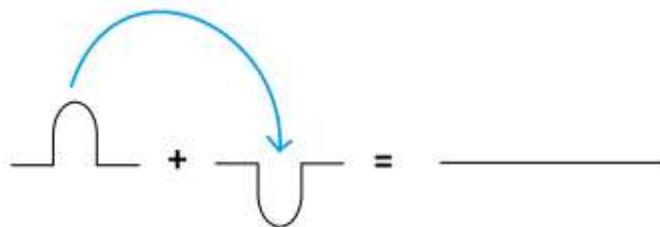
我不相信減法的原因來自另一個不真實的故事。簡言之，如下。

小孩的時候，我曾經經常在沙箱裡玩耍。在那裡，我發現可以以一堆沙子為正數數數目：一堆，兩堆等等。而且我也發現可以通過排列一堆堆的沙子來加正數。例如，我看到二加三等於五，簡單地排列這樣的沙子。

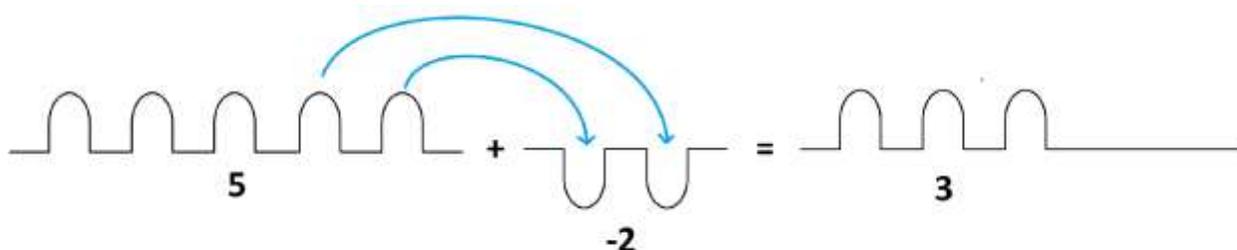


計數和排列一堆堆的沙子使我有幾個小時的樂趣，以探索加數。

但有一天，我有一個驚人的想法閃過！我意識到我也可以利用洞穴，而不是一堆沙子來計數。我立刻看到，一個洞穴與一堆沙子是相反：一個堆沙子與一個洞穴放在一起，彼此抵消。哇！



後來在學校，老師教我們稱一個洞穴“-1”，兩個洞穴“-2”等等，被告知要做這個叫做“減法”的東西，但是我從來沒有真正相信減法。我的同事們會說 $5-2$ ，“五拿走兩個”，但是我在想五堆沙子，還有兩個洞。這張圖片顯示答案是三堆沙子。



是。這與我的朋友答案當然是一樣：兩個洞“拿走”了兩堆沙子。但我有一個優勢。例如，我的同事會說 $7-10$ 沒有答案。但我看到答案。

$$\begin{aligned} 7-10 &= \text{七堆沙子十個洞} \\ &= \text{三個洞} \\ &= -3 \end{aligned}$$

簡單！

減法只是的加法相反。

(順便說一句，我會高興地把 $7-10$ 寫作“ $7 + -10$ ”，這使我的思維更加明顯。)

我們現在回到我們的點和盒子，特別是 $1 \leftarrow 10$ 機器。

在那裡，我們使用點子，我一直畫了堅實的點。



我們現在需要與點相反的概念，就像一個洞是一堆沙子的相反。我會把一個點的相反畫成一個空心圓圈稱為一個相反點。

$$\bigcirc = \text{相反點}$$

像物質和反物質一樣，像1和-1 一堆沙子和洞一樣，當它們聚在一起時，它們彼此消滅，一個點和一個相反點也應該彼此消滅 - POOF！ - 當在一起時不會留下任何東西。

$$\bullet + \bigcirc = \text{POOF!}$$

1 -1 0

而且我們可以用點和相反點來進行基本的算術，就像我們用 一堆沙子和洞一樣。

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \bigcirc \bigcirc \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

5 + -3 = 2

$$\begin{array}{c} \bullet \bigcirc \bigcirc \\ \bigcirc \bigcirc \bullet \end{array} = \bigcirc$$

2 + -3 = -1

附加：順便說一下，有些學生在英語上喜歡把一個點"dot"的相反稱為"tod"。你能猜到他們為什麼想到這個名字嗎？

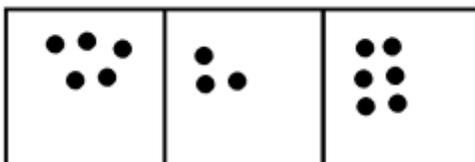
減法

考慮這個減法問題。

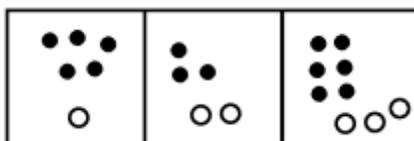
$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline \end{array}$$

對我來說，這是 536 加 123 的相反。

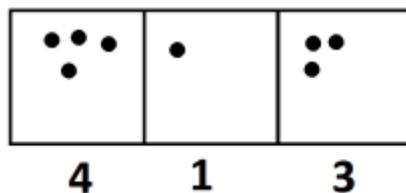
第一個數字 536，在 $1 \leftarrow 10$ 機器中看起來像這樣：五個點，三個點，六個點。



對此我們加上 123 的相反。也就是說，我們加上一個百位相反點，二個十位相反點，三個個位相反點。



現在有很多的彼此消滅：POOF！POOF POOF！POOF POOF POOF！



我們看到 413 答案出現。

注意，我們得到這個答案，好像我們只是從左到右計算，說

5 帶走 1 是 4，
3 帶走 2 是 1，

和

6 帶走 3 是 3。

是! 再次從左到右!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

好吧。那個例子太好了, $512 - 347$ 怎麼樣?

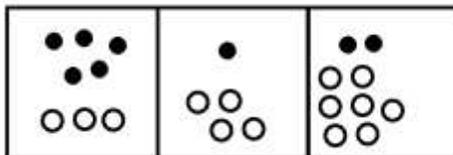
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

從左到右, 我們得到: 5 拿走 3 是 2, 1 帶走 4 是 -3, 2 帶走 7 是 -5。
答案是二百負三十負的五。

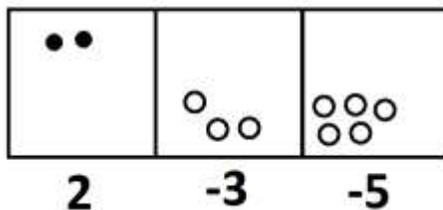
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

這個答案絕對是數學上正確的! 我的照片顯示它是。

這裡有五個百, 一個十, 兩個一, 三個相反百, 四個相反十和七個相反一。



經過很多彼此消滅, 我們得到了兩個實際的一百, 三個相反十和五個相反一。

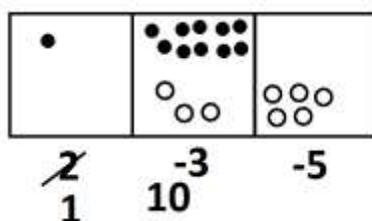


答案確實是二百負三十負五！

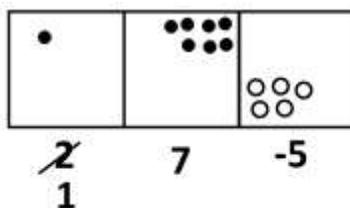
但是，當然，我們減法問題的答案似乎對社會來說很奇怪。我們可以為社會考慮這個數學上正確的答案嗎？

需要一個洞察力，我們意識到可以“反爆炸”那些點：左邊一個盒子中的任何一個點必須來自右側的10個點。

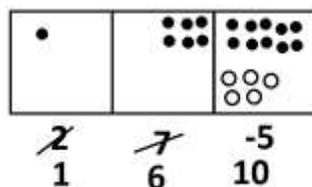
好的。讓我們“反爆炸”在最左邊的一個盒子中兩個點的一個。這樣做給了這張圖片。



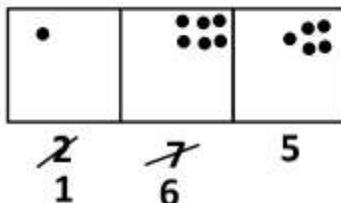
彼此消滅後，我們看到我們現在得到了一百，七十和負五。美麗！



再來“反爆炸”



而經過更多彼此消滅，我們看到一個社會可以理解的答案：一百六十五。



傳統算法

這種點和盒子的方法如何與標準算法進行比較？

再考慮一下 $512 - 347$

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

標準算法從右邊開始，先看看“2 拿走 7”，但是做不到。

（你可以做到這一點， -5 ，但是你不為這個算法這個寫）。

所以你會怎麼做？

你“借一”，就是你從十位欄中抽出一個點，並反爆炸成為十個一。這在十位列中留下零個點。我們應該在個位列中寫兩上十。

$$\begin{array}{r} 10 \\ 5\cancel{1} 2 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

但是我們在這裡有點聰明，只寫 12 而不是 $10+2$ 。（也就是說，我們把 1 放在 2 前面，讓它看起來像十二。）

$$\begin{array}{r} 0 \\ 51\overset{1}{2} \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

然後我們說“十二帶走七是五”，然後寫這個答案。

$$\begin{array}{r} 0 \\ 51\overset{1}{2} \\ -347 \\ \hline 5 \end{array}$$

最右邊的列完成了。現在轉到中間的列。

我們看到“零拿走四”，這是無法做到的。所以執行另一個反爆炸，也就是另一個“借”，在那一欄中看到 $10-4$ 。我們寫答案 6 。

然後我們移動到我們最後一個列 $4-3$ ，這是 1 。

$$\begin{array}{r} 4\overset{1}{0} \\ 51\overset{1}{2} \\ -347 \\ \hline 65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\overset{1}{0} \\ 51\overset{1}{2} \\ -347 \\ \hline 165 \end{array}$$

唷！

如果你願意，這是一個你可以嘗試的問題。我的回答是在本章末尾。

1.用以下兩種方式計算：點和盒子方式（並找出社會明白的答案），然後使用傳統算法。答案應該是一樣的。

$$\begin{array}{r} 6328 \\ -4469 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78390231 \\ -32495846 \\ \hline \end{array}$$

一路上的思考問題：當你找出社會明白的答案時，從左到右還是從右到左反爆炸更容易？

額外的問題：你認為你可以用點和盒子的方式計算像傳統方法一樣快嗎？

再次。所有正確的數學方法都是正確的，它只是一個風格的問題，找出你最喜歡減法的方法。傳統的算法讓你從右到左工作，隨時隨地做所有的反爆炸。點和盒子方法讓你“只要做！”，並在最後進行所有的反爆炸。這兩種方法都是正確的。



探索

Here are some “big question” investigations you might want to explore, or just think about. Have fun!

探索1：還有另外一種方法來解釋點和盒子答案嗎？

當Sunil看見

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

他在他的紙上寫道：

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

然後他說，答案必定是165。

- 你能解釋一下他看到和想到什麼嗎？
- 7109 - 3384，Sunil 會在他的紙上寫寫什麼？

探索2：負數答案？

你如何處理和解釋這個減法問題？

$$\begin{array}{r} 148 \\ -677 \\ \hline \end{array}$$



解決方案

如所承諾的，這是我提出的問題的解決方案。

1.

$$6328 - 4469 = 2|-1|-4|-1 = 1|9|-4|-1 = 1|8|6|-1 = 1|8|5|9 = 1859$$

$$\begin{aligned} 78390231 - 32495846 &= 4|6|-1|0|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|9|0|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|10|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|4|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|3|9|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|3|8|5 = 45894385 \end{aligned}$$

我個人覺得從左到右做反爆炸是比較容易的。