



*Uplifting Mathematics for All*

## DES POINTS QUI EXPLOSENT CHAPITRE 4

# SOUSTRACTION

Continuons d'utiliser la machine  $1 \leftarrow 10$ .

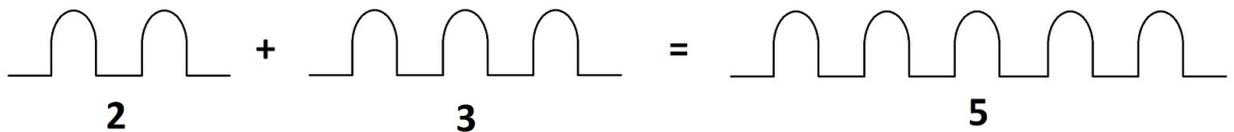
Jusqu'à maintenant, nous avons vu la logique associée à l'addition et à la multiplication. Mais nous avons sauté la soustraction. Pourquoi? Parce que je ne crois pas à la soustraction! Selon moi, la soustraction n'est que l'addition des opposés.

Voyons ce que je veux dire par là.

## NOMBRES NÉGATIFS

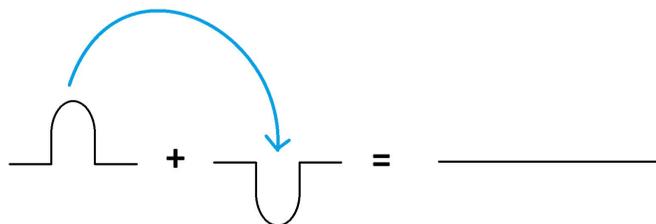
Mon incrédulité envers la soustraction est liée à une autre fausse anecdote. En voici un résumé.

Lorsque j'étais enfant, je jouais fréquemment dans un carré de sable. Au cours de ces périodes de jeu, j'ai découvert les nombres positifs en comptant les tas de sable : un tas, deux tas, etc. J'ai aussi appris comment additionner les nombres positifs en alignant simplement les tas de sable. Par exemple, j'ai constaté que deux plus trois égale cinq en alignant les tas de sable comme suit.

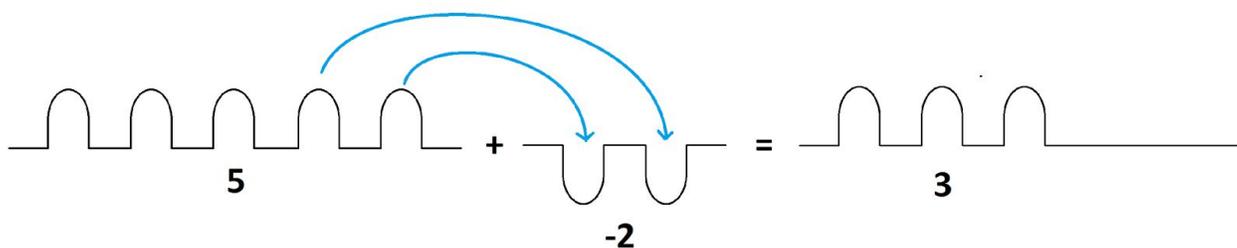


Je me suis amusé pendant des heures à compter les tas de sable et à les aligner pour explorer les additions.

Mais, un jour, j'ai eu une soudaine révélation! Au lieu de seulement faire des tas de sable, je pouvais aussi creuser des trous. J'ai aussitôt compris qu'un trou est l'opposé d'un tas de sable : combinez un tas et un trou, et ils s'annulent. Hallucinant!



Plus tard, à l'école, j'ai appris à désigner un trou par  $-1$ , deux trous par  $-2$ , et ainsi de suite, et on m'a montré à faire cette opération qu'on appelle « soustraction ». Cependant, je n'ai jamais réellement cru à la soustraction. Tandis que mes collègues lisaient  $5 - 2$  et l'exprimaient comme « cinq moins deux », je voyais le tout comme cinq piles auxquelles on ajoute deux trous. L'illustration ci-dessous montre que la réponse est trois tas.



Oui, bien sûr, la réponse obtenue est la même que celle de mes collègues : les deux trous « ont annulé » deux des tas de sable. Mais j'avais un avantage. Par exemple, mes collègues affirmaient qu'il n'était pas possible de répondre à  $7 - 10$ . J'ai pu voir la réponse.

$$\begin{aligned} 7 - 10 &= \text{sept tas et dix trous} \\ &= \text{trois trous} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Facile!

La soustraction est simplement l'addition de l'opposé.

(Au fait, je serai heureux d'écrire  $7 + -10$  au lieu de  $7 - 10$ , de manière à rendre le raisonnement plus évident.)

Retournons maintenant à nos machines de points et de boîtes, et plus particulièrement la machine  $1 \leftarrow 10$ .

Nous travaillerons ici avec des points, que j'ai jusqu'à maintenant dessinés comme des points noirs.

 = dot

Nous devons maintenant introduire la notion de l'opposé d'un point, tout comme le trou est l'opposé d'un tas de sable. Je vais représenter l'opposé d'un point noir par un point blanc, que nous appellerons un « antipoint ».

 = antidot

Tout comme la matière et l'antimatière, et comme 1 et -1 représentant des tas et des trous, qui s'annulent lorsque combinés l'un à l'autre, un point et un antipoint doivent également s'annuler – POUF! – lorsqu'ils sont additionnés, afin d'égaliser zéro.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & + & \circ & = & \text{POUF!} \\
 1 & & -1 & & 0
 \end{array}$$

Et comme nous l'avons fait avec les tas de sable et les trous, nous pouvons faire des calculs arithmétiques de base à l'aide des points et des antipoints.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet \bullet \bullet \circ \circ & = & \bullet \bullet \\
 5 + -3 & = & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \circ \bullet \circ & = & \circ \\
 2 + -3 & = & -1
 \end{array}$$

**Aparté :** Soit dit en passant, certains étudiants préfèrent désigner l'opposé d'un point comme un *tniop*. Pouvez-vous deviner pourquoi ils ont songé à ce nom?

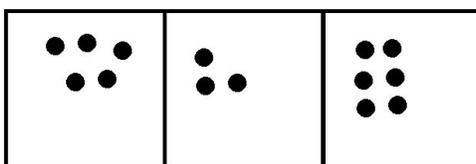
## SOUSTRACTION

Examinez cette soustraction.

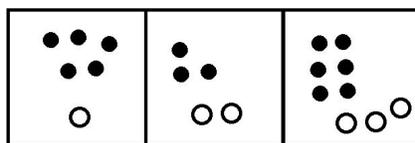
$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline \end{array}$$

Selon moi, il s'agit de 536 plus l'opposé de 123 .

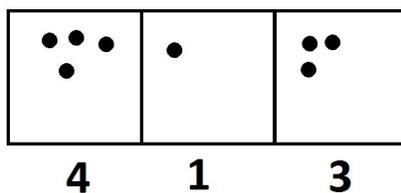
Le premier nombre, 536 , est illustré comme suit dans une machine  $1 \leftarrow 10$  : cinq points, trois points et six points.



À ce nombre, nous ajoutons l'opposé de 123 . Ainsi, nous ajoutons une anti-centaine, deux anti-dizaines et trois anti-unités.



C'est alors que se produisent plusieurs annulations : POUF!; POUF POUF!; POUF POUF POUF!



Nous obtenons la réponse 413 .

Vous pouvez constater que nous obtenons cette réponse, même si nous faisons les opérations de la gauche vers la droite en indiquant ce qui suit :

5 moins 1 égale 4 ;

3 moins 2 égale 1 ;

et

6 moins 3 égale 3 .

Eh oui! Encore une fois de la gauche vers la droite!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

D'accord. Cet exemple était trop commode. Et si nous calculons  $512 - 347$  ?

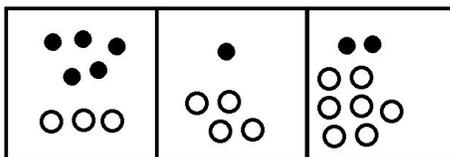
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

De la gauche vers la droite, nous obtenons : 5 moins 3 égale 2 ; 1 moins 4 égale -3 ; et 2 moins 7 égale -5 . La réponse est deux-cent, moins « trois-ante », moins cinq.

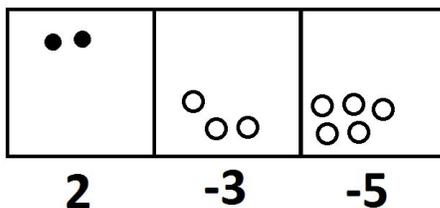
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

De plus, cette réponse est tout à fait mathématiquement exacte! L'illustration le démontre.

Vous obtenez cinq centaines, une dizaine et deux unités combinées à trois anti-centaines, quatre anti-dizaines et sept anti-unités.



Après plusieurs annulations, il reste deux centaines, trois anti-dizaines et cinq anti-unités.

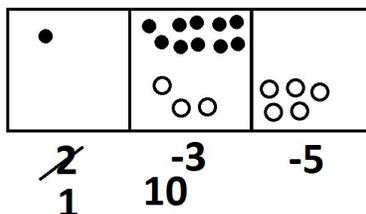


La réponse est bien deux-cent, moins « trois-ante », moins cinq!

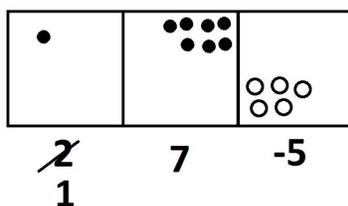
Bien sûr, l'indication du résultat de la soustraction de cette façon semblera vraiment bizarre au sein de notre société. Pouvons-nous adapter cette réponse mathématiquement exacte pour qu'elle soit plus acceptable pour la société?

En un éclair de génie, nous pouvons réaliser que nous pouvons « désexploder » des points : un point dans une boîte à gauche a dû être créé par dix points qui étaient contenus dans la boîte voisine à droite.

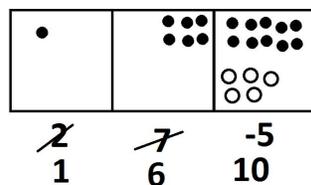
D'accord. Désexplodons un des deux points qui se trouvent dans la boîte à l'extrême gauche, ce qui nous donne le résultat illustré ci-dessous.



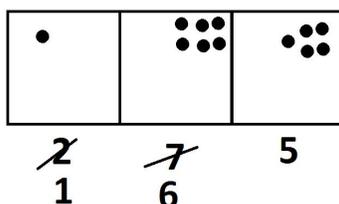
Après quelques annulations, la réponse est maintenant une centaine, sept dizaines et moins cinq. De toute beauté!



Effectuons d'autres « désexplosions ».



En effectuant d'autres annulations, nous obtenons une réponse que la société peut comprendre : cent-soixante-cinq.



## L'ALGORITHME TRADITIONNEL

Comment cette approche fondée sur l'utilisation de points et de boîtes se compare-t-elle à l'algorithme standard?

Prenons de nouveau l'opération  $512 - 347$ .

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

L'algorithme standard exige que vous partiez de la droite, ce qui vous amène à calculer  $2$  moins  $7$ , ce qu'il n'est pas possible de faire.

(En fait, vous pouvez le faire, ce qui vous donne  $-5$ , mais vous ne pouvez pas écrire ce résultat dans le cadre de cet algorithme.)

Alors, que devons-nous faire?

Nous devons faire une retenue. Cela signifie que nous devons retirer un point de la colonne des dizaines et le désexplorer en dix unités. Il ne reste ainsi aucun point dans la colonne des dizaines. Nous devons écrire dix unités au-dessus du deux de la colonne des unités.

$$\begin{array}{r} 0 \text{ } 10 \\ 5 \cancel{1} 2 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Néanmoins, soyons plus futés en écrivant simplement  $12$  au lieu de  $10 + 2$ . (Nous ajoutons ainsi un petit  $1$  devant le  $2$  pour que la valeur représente douze.)

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \cancel{1} \cancel{2} \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline \end{array}$$

Ensuite, nous disons « douze moins sept égale cinq » et écrivons cette réponse.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \cancel{1} \cancel{2} \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

Nous venons de trouver le résultat de la colonne la plus à droite. Passons maintenant à la colonne du milieu.

L'opération « zéro moins quatre » n'est pas possible. Nous devons donc faire une autre désexplosion, c'est-à-dire une autre retenue, pour que l'opération indiquée dans cette colonne soit  $10 - 4$ . Nous écrivons la réponse 6.

Nous passons ensuite à la dernière colonne dont l'opération  $4 - 3$  égale 1.

$$\begin{array}{r} 4 \cancel{0} \\ \cancel{5} \cancel{1} \cancel{2} \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline 6 \ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \cancel{0} \\ \cancel{5} \cancel{1} \cancel{2} \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline 1 \ 6 \ 5 \end{array}$$

Fiou!

Voici une question à laquelle vous pouvez tenter de répondre, si vous le souhaitez. Ma réponse à celle-ci se trouve à la fin de ce chapitre.

1. Faites les calculs ci-dessous de deux façons : utilisez l'approche des points et des boîtes (en adaptant la réponse pour qu'elle puisse être comprise par la société), puis calculez les opérations selon l'algorithme traditionnel. Les réponses obtenues devraient être identiques.

$$\begin{array}{r} 6328 \\ - 4469 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78390231 \\ - 32495846 \\ \hline \end{array}$$

**Question à vous poser pendant ces calculs :** Afin d'adapter vos réponses pour qu'elles soient conformes à la société, cela vous semble-t-il plus facile de désexploder les points de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche?

**Question supplémentaire :** Croyez-vous que vous pourriez apprendre à faire les calculs aussi rapidement avec l'approche des points et des boîtes que vous le faites actuellement selon l'approche traditionnelle?

Encore une fois, ces deux approches mathématiques sont correctes, et c'est seulement une question de goût quant à l'approche que vous préférez utiliser pour la soustraction. L'algorithme traditionnel vous demande de faire les calculs de la droite vers la gauche, en procédant aux désexplosions au fur et à mesure. L'approche des points et des boîtes vous permet de vous limiter à faire les calculs, en gardant toutes les désexplosions pour la fin. Les deux approches sont appropriées et exactes.



## EXPLORATIONS APPROFONDIES

Voici quelques « grandes questions » à explorer en profondeur ou en surface. Amusez-vous!

### EXPLORATION 1 : EXISTE-T-IL UN AUTRE MOYEN D'INTERPRÉTER LES RÉPONSES OBTENUES SELON L'APPROCHE DES POINTS ET DES BOÎTES?

Quand Sylvain a vu

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

il a écrit sur le papier les rangées de chiffres suivantes :

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

Ensuite, il a affirmé que la réponse doit être 165 .

- Pouvez-vous expliquer sa perception et son raisonnement?
- Que Sylvain écrirait-il comme réponse pour l'opération  $7109 - 3384$  ?

### EXPLORATION 2 : QU'EN EST-IL DES RÉPONSES NÉGATIVES?

Comment traiteriez-vous et interpréteriez-vous cette soustraction?

$$\begin{array}{r} 148 \\ - 677 \\ \hline \end{array}$$



## SOLUTIONS

Comme convenu, voici mes solutions aux questions posées.

1.

$$6328 - 4469 = 2 | -1 | -4 | -1 = 1 | 9 | -4 | -1 = 1 | 8 | 6 | -1 = 1 | 8 | 5 | 9 = 1859$$

$$\begin{aligned} 78390231 - 32495846 &= 4 | 6 | -1 | 0 | -5 | -6 | -1 | -5 \\ &= 4 | 5 | 9 | 0 | -5 | -6 | -1 | -5 \\ &= 4 | 5 | 8 | 10 | -5 | -6 | -1 | -5 \\ &= 4 | 5 | 8 | 9 | 5 | -6 | -1 | -5 \\ &= 4 | 5 | 8 | 9 | 4 | 4 | -1 | -5 \\ &= 4 | 5 | 8 | 9 | 4 | 3 | 9 | -5 \\ &= 4 | 5 | 8 | 9 | 4 | 3 | 8 | 5 = 45894385 \end{aligned}$$

Selon moi, il est vraiment plus simple de faire les désexplosions de la gauche vers la droite.