

EXPLODING DOTS
CHAPTER 5

第五章 除法

我们已经学习了怎么做加减和乘法，现在是时候开始学习怎么做除法了。
先来看一个例子：计算 $276 \div 12$ 。

一个不太聪明的方法是：在一张图上画 276 个点，然后每 12 个点放在一组。大概一个小时之后你会发现，我们可以把 276 个点分成一共 23 个组，每组里面有 12 个点。

当然还有一个很棒的方法来解决这个问题：在一个 $1 \leftarrow 10$ 机器里画 276 个点，这样马上我们就能看到有 23 个组，每组里面有 12 个点。

边读边试试我们怎么解决这个问题吧。

一个很酷的事实：你知道除法的符号 \div 过去被用来标注有疑问的文字吗？

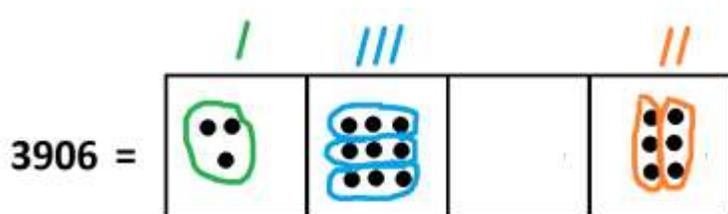
现在我们开始吧

我们先来做一个一眼就能看出来答案的除法问题： $3906 \div 3$

答案是 1302。

我们可以把 3906 看做 $3000 + 900 + 6$ ，这样每一个数字除以 3 我们就得到了 $1000 + 300 + 2$ 。

如果我们在 $1 \leftarrow 10$ 机器里画 3906 的图，我们看到有几组 3：千位数上有一个 3，百位数上有 3 组 3，个位数上有两组 3。这样我们就得到了这个问题的答案！



我们如果这样解决这个除法问题，一眼就能在图里看到答案。

现在试试用类似的方法来找到 $402 \div 3$ 的答案吧。你能看出来答案是 134 吗？

如果你想进一步理解这些图的内在含义（这个问题真的就这么简单吗？），可以跳到这章的“深思熟解”一节。

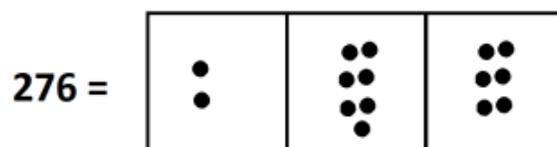
如果你准备好了做下一步，我们继续！

长除法

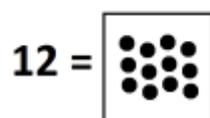
如果除数是个位数，问题很容易解决。但是如果除数有很多位呢？我们管这样的除法叫做长除法。

比如 $276 \div 12$ 。

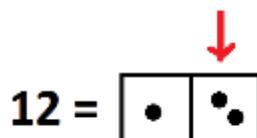
我们可以先画 276 的图：



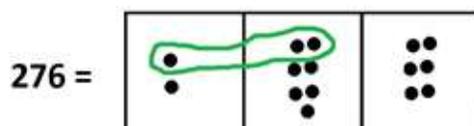
记得我们需要找这里一共有多少组 12。在图里 12 是这样的：



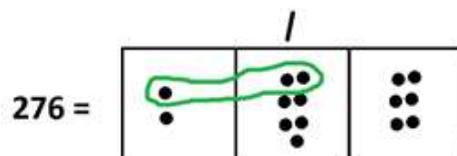
这个图严格来说并不准确，因为在 $1 \leftarrow 10$ 机器里 12 看上去并不是这样的。我们应该有两个格子，十位数的格子里有 1 个点，个位数的格子里有两个点。（但是我们需要记住的是这个图里的 12 个点都在个位数的格子里。）



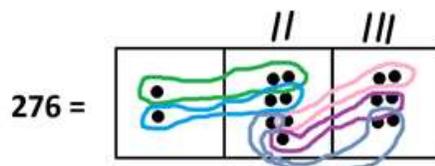
好，现在我们来找找 276 里面一共有多少 12。你能看到这样的 一个点紧挨着两个点的模式吗？当然，这就有一个：



我们把每一个这样的 12 圈起来，12 个点其实就在这个圈的右侧。所以这样我们在十位数上发现了一个 12。



当然还有更多这样的12：



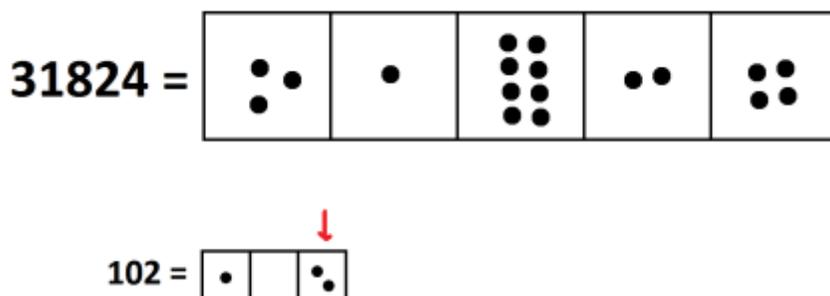
十位数上一共有两组12，个位数上一共有3组12，所以 $276 \div 12$ 的答案是23.

下面有几个练习题，答案都在这一章的最后。

1. 用图示画点画格子方法计算 $2783 \div 23$ 。
2. 计算 $3900 \div 12$ 。

我们再来一起做一个问题：计算 $31824 \div 102$.

先来画图：



所以现在我们需要在31824的图里面找一个点紧挨着空格紧挨着两个点的模式。（记住，所有的102个点其实都在我们找到的每个符合这个条件的模式的最右边）

我们很容易能找到一些这样的模式：（我现在用三个同颜色的x来表示一个圈，这样图就不会看上去很乱）



所以答案是312.

你可以自己试着解决下面的几个问题吗？

3. 计算 $46632 \div 201$.
4. 证明 $31533 \div 101$ 的商是 312，余数是 21.

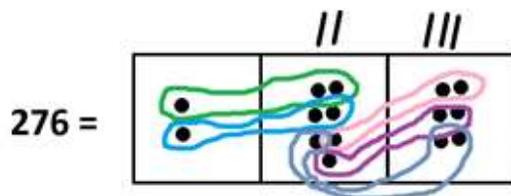
除数是 10

用画点和圈的方法来计算 $2130 \div 10$ 。你可以解释为什么答案是 213 吗？数一数你的图里有几组 10 吧。

很多人说当除数是 10 的时候，只需要把被除数最后一位的 0 去掉就得到答案了。你可以解释为什么吗？

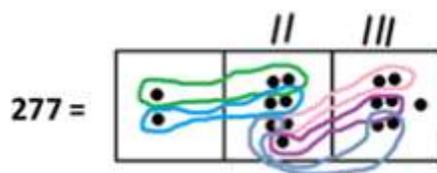
余数

上一节里我们看到 $276 \div 12 = 23$



假设我们想计算 $277 \div 12$ ，我们会得到什么样的图呢？应该怎么解释呢？

其实新的图和上面的差不多一样，只不过最右边多了一个点，这个点不在任何一个代表12的圈里。



这个图就表明了 $277 \div 12$ 也等于 23，只不过有一个余数，而这个余数就是多出来的这个点，代表余数为 1。

我们可以用下面的式子来表达有余数的除法：

$$277 \div 12 = 23 R 1$$

(每个国家的余数表示方法可能会有所不同。)或者你想要数学上更精确点，我们也可以说 $276 \div 12$ 的商 23，余数是 1 模 12：

$$277 \div 12 = 23 + \frac{1}{12}.$$

试试下面这几个类似的题目吧.

5. 计算 $2789 \div 11$.
6. 计算 $4366 \div 14$.
7. 计算 $5481 \div 131$.

你对这个用点和框的方法做除法熟悉之后，你会发现从左到右来计算除法比较好，尤其是当我们不确定是否有余数的时候。我们会希望剩下的点（也就是余数）出现在个位，或是十位，而不是百位或是更高的位置。不过如果你不这样做，也不至于出错，**Unexplosions** 会帮你得到正确的答案。

DEEPER EXPLANATION

深思熟解

As one mulls on the long-division process you come to realize that there are subtle issues at play. 如果你认真想想我们做长除法的过程，你会意识到有一些问题可能需要我们认真考虑下。

Let's take some time here to think through division more slowly. And let's start with the example whose answer we can write down right away.

我们来慢慢地考虑到底我们是怎么做的除法。先来看一个例子：

$3906 \div 3$ 等于多少？

答案: 1302.

我们是怎么看出来这个答案的？

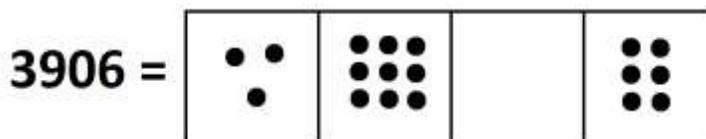
我们可以把3906看作是 $3000 + 900 + 6$ ，这样每一个数字除以3 我们就得到1302。

被除数: $3906 = 3000 + 900 + 6$

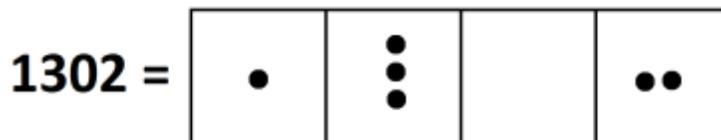
除数为3:

$$3906 \div 3 = 1000 + 300 + 2 = 1302.$$

很好！我们看到这个分解的方法也同样适用于点和框的图。在图里我们看到千位数有3个点，百位数有9个点，个位数有6个点。



每一位除以3 我们得到：

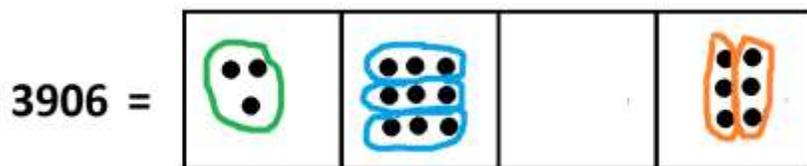


让我们认真考虑最后一步是怎么回事。

我们可以把 $3906 \div 3$ 这个除法想成是：

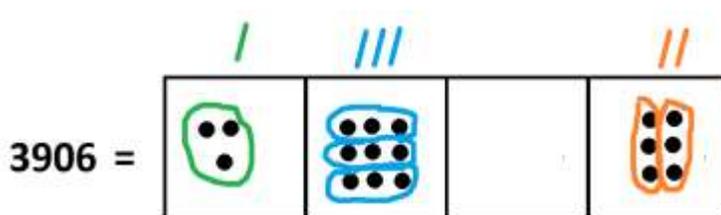
假设每组有3个物体，在3906个物体里能够找到多少组？

这样假设每组有3个点，我们知道3000个点里有1000组，900个点里一共有300组，6个点里一共有2组。我们之前看到的图也给出了同样的答案。



如果我们把每位都 **unexplodes**, 绿色的圈代表1000, 蓝色的圈每一个都表示100, 这样三个蓝色的圈就代表300。我们看到图里一共有1000个绿色的圈, 300个蓝色的圈, 2个橙色的圈, 也就是说我们一共得到了1302个组, 每个组里都有3个点。

我们也可以直接在图里数, 假设每组有3个点, 这样千位数有1组, 百位数有3组, 十位数有0组, 个位数有2组, 所以最后我们得到1302组。



上面数数的竖线其实就表示我们把3906除以三之后得到的值: 每3个点变成了1个点, 这样我们就得到了下面这幅图:

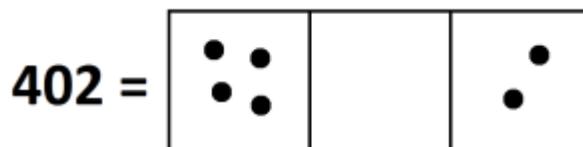


最后这幅图告诉我们3906里一共有多少组3。但是我们其实不需要画这幅图: 上面的竖线已经告诉了我们这个信息。所以数完有多少组, 看看我们得到了几条竖线就够了。试试下面这道题:

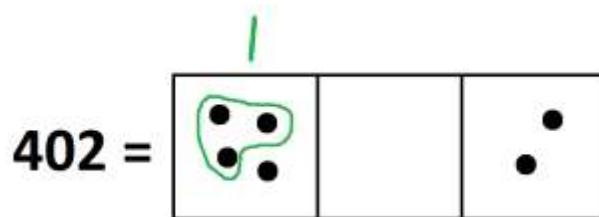
8. 画426的点和框的图, 解释为什么 $426 \div 2$ 等于213. 在应用里也试试这道题。

我们再看一道题: $402 \div 3$.

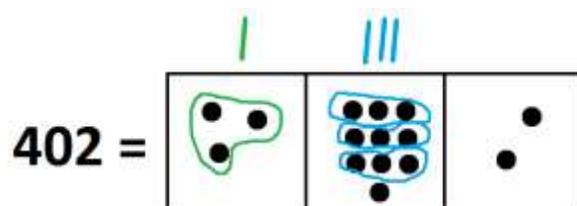
402的图是这样的:



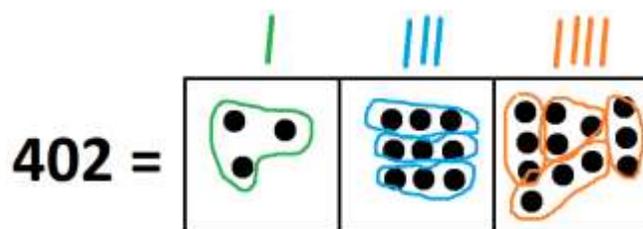
我们需要找有多少组3。百位数上有一组：



可是剩下的点怎么办？用 **unexplosion** ！



这样十位数上我们得到了3组，再做一次 **unexplosion**：

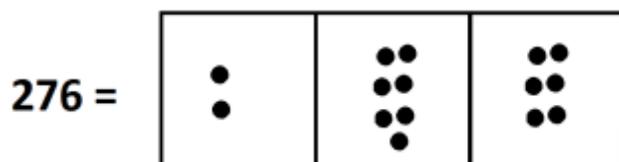


个位数上我们就得到了4组。所以结果是百位数上有1组，十位数上有3组，个位数上有4组。也就是说 $402 \div 3 = 134$ 。

9. 我们刚刚得到 $402 \div 3 = 134$ 。那么你觉得 $404 \div 3$ 等于多少呢？你觉得在解这道题的图里你会看到什么？
10. 用点和框的方法计算 $61230 \div 5$ 。(现在是不是觉得画这么点太累了？你觉得一定需要画这些点吗？)

同样的方法也适用于多位数除法，比如 $276 \div 12$ 。

276的图如下：



十二个点如下：

$$12 = \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

但是在 $1 \leftarrow 10$ 的机器里我们其实得到的下图：（注意所有的 12 个点其实还都最右边的框里）

$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

↓

这样当我们找 276 里一共有多少组 12 的时候,我们得到的是下面的图：

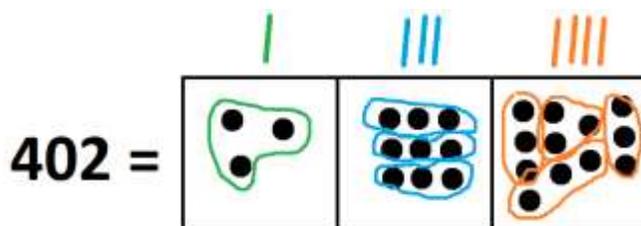
$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

// ///

十位数上有两组，个位数上有三组，所以答案是 23。也就是说 $276 \div 12$ 等于 23。

传统算法

下图告诉我们 $402 \div 3$ 等于 134。



这个看起来一点也不像我们在学校里学的做除法的方法。在学校里我们学到的除法是这样的：

$$\begin{array}{r} 134 \\ 3 \overline{)402} \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

一开始看这个方法会觉得它特别神秘，但其实这个和我们提到的点和框的方法本质上是一样的。我们先来看学生们经常学到的估值法。

为了计算 $402 \div 3$ ，我们需要找到 402 里有几组 3。
咱们先来猜猜，比如 100 组。

$$\begin{array}{r} \text{Groups of 3} \\ 3 \overline{)402} \\ 100 \end{array}$$

拿走 100 组 3 之后，402 里还剩下多少？答案是 102。

$$\begin{array}{r} \text{Groups of 3} \\ 3 \overline{)402} \\ - 300 \\ \hline 102 \end{array}$$

我们再来猜猜 102 里有多少个 3？比如 30 组。

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ -300 \\ \hline 102 \\ -90 \\ \hline 12 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

这样我们就剩下了 12. 这里面有 4 组 3。

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ -300 \\ \hline 102 \\ -90 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

4

所以我们一共得到了 134 组个 3，也就是说 $402 \div 3 = 134$ 。

点和框的方法其实也在做同样的工作，只不过是以图示的方式。

$$402 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & \text{III} & \text{IIII} \\ \hline \text{[2 dots]} & \text{[10 dots]} & \text{[12 dots]} \\ \hline \end{array}$$

其实我们之前看到的除法的式子也是同样的方法。这个方法最开始被发明出来是为了节约笔墨，不需要重复写很多数字而已。

$$\begin{array}{r} 134 \\ 3 \overline{)402} \\ \underline{3} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ -300 \\ \hline 102 \\ -90 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

4



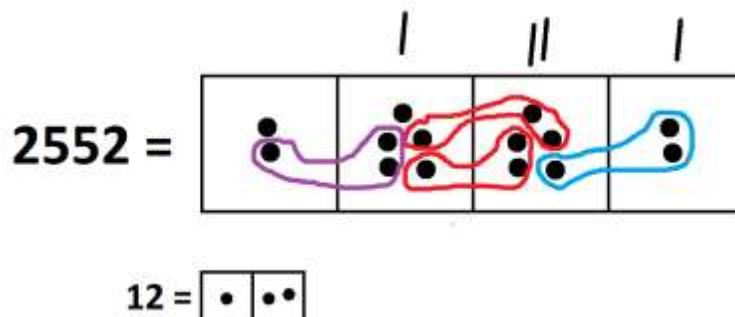
探索与发现

如果你有兴趣，试试下面这个问题吧。

EXPLORATION: LEFT TO RIGHT? RIGHT TO LEFT? ANY ORDER?

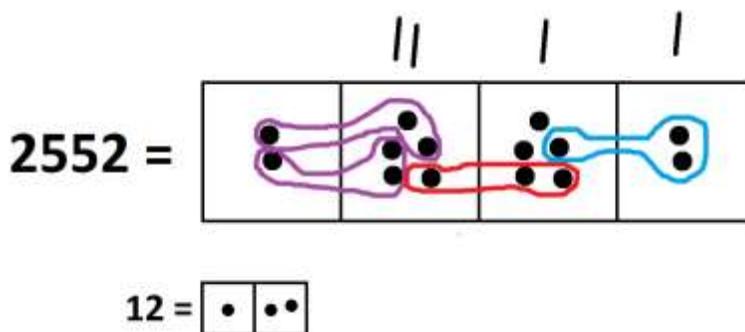
探索：从左到右，还是从右到左？

Kaleb 想计算 $2552 \div 12$ ，所以画了下面的图，他从右到左，圈出了一共有多少个 12。



所以他得到的答案是 121，余数是 1100。

Mabel 也在做同一个问题，但是她是从左到右做的：



所以她的答案是 $2552 \div 12$ 等于 211，余数是 20。

其实两个人的答案数学上来说都是正确的，但是他们的老师指出，大多数人做这样的除法运算的时候，会得到一个比较小的余数：1100 和 20 作为余数都有点太大了，因为除数本身是 12，所以余数应该比它小。老师给他们看了教材上给出的答案：

$$2552 \div 12 = 212 R 8$$

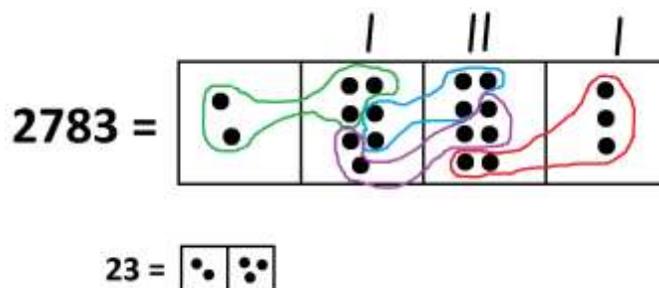
你可以帮助 Kaleb 和 Mabel 继续他们的运算，得到和教材上一样的答案吗？



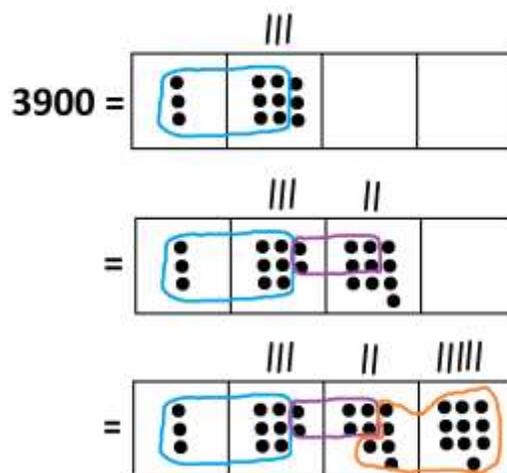
答案

以下是本章里面问题的答案。

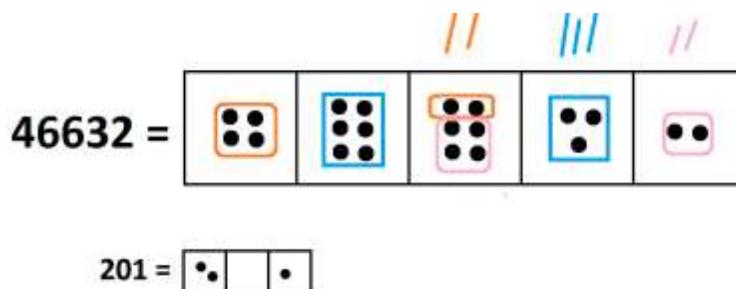
1. $2783 \div 23 = 121$. (你能看出来我是如何有效的画圈的吗?)



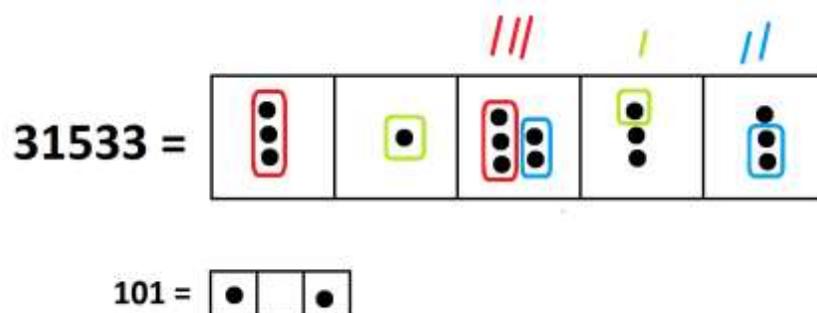
2. $3900 \div 12 = 325$. 我们需要做几次 **unexplosions**。



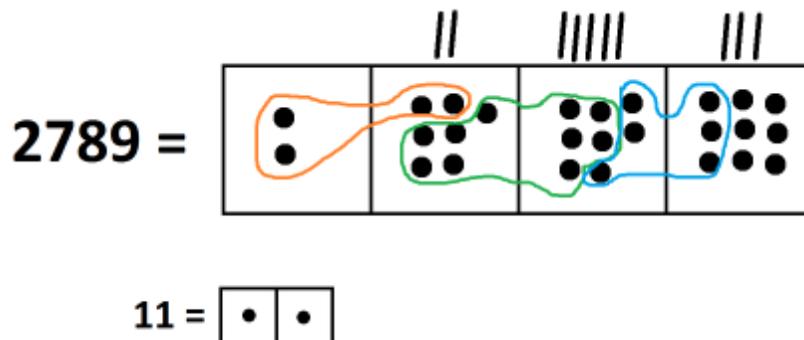
3. $46632 \div 201 = 232$.



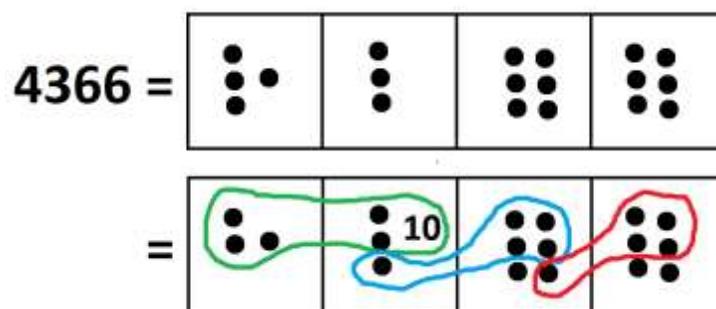
4.



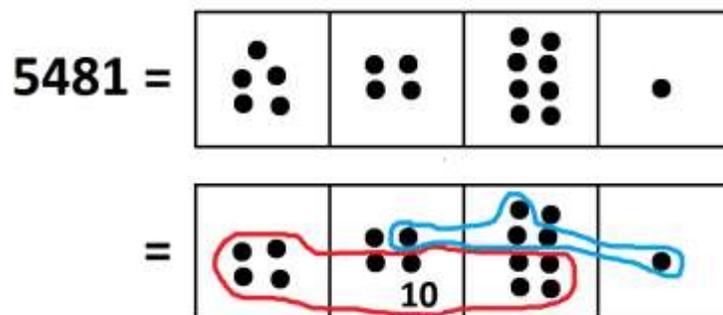
5. $2789 \div 11 = 253$, 余数是 6 . 也就是说 $2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}$.



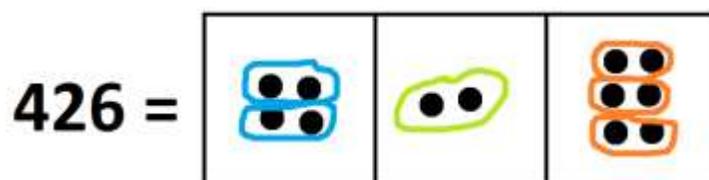
6. $4366 \div 14 = 311 + \frac{12}{14}$.



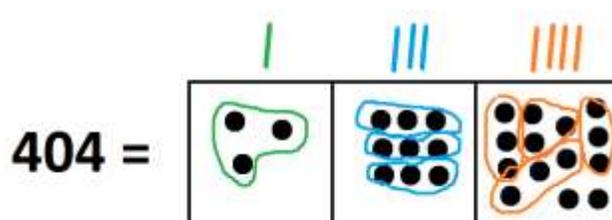
7. $5481 \div 131 = 41 + \frac{110}{131}$.



8. 我们看到百位数上有两组 2（它们实际上代表 200 组 2），十位数上有一组 2（他们实际上代表 10 组 2），个位数上有三组 2，所以一共有 213 组，每个组里有两个点。



9. 在 $404 \div 3$ 的图里我们看到有两个点剩下了：

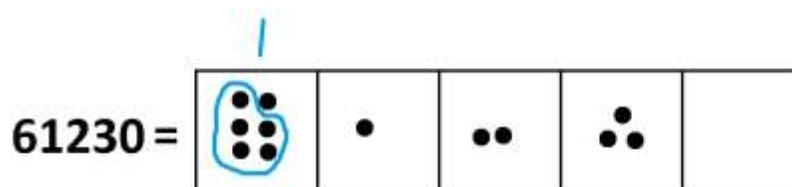


所以 $404 \div 3$ 等于 134，余数是 2。

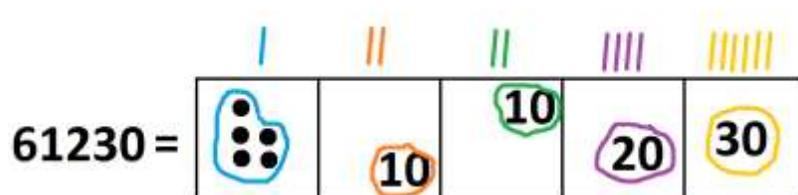
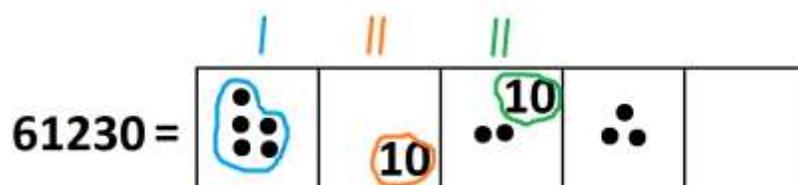
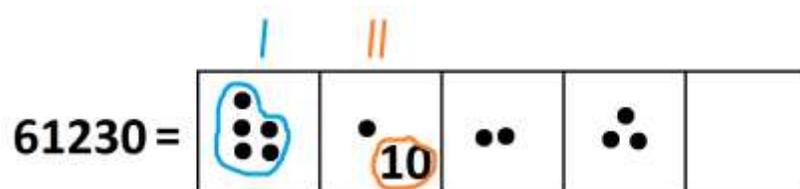
Note: 我们可以把这个余数视为“被三除后余下 2”：

$$404 \div 3 = 134 + \frac{2}{3}$$

10. 我们马上能看到有一组 5：



接下来我们需要做 **unexplosions**. (我们也可以只写下数字, 不用每次都把点画出来)



这样我们得到
 $61230 \div 5 = 12246$.