

DES POINTS QUI EXPLOSENT

CHAPITRE 5

DIVISION

L'addition, la soustraction, la multiplication... C'est maintenant le temps de parler de division.

Voici un exemple de division : *Calculez $276 \div 12$.*

Il existe un moyen horrible de trouver la réponse : *Illustrez 276 points sur une page, puis encerclez des groupes de douze points. Après environ une heure, vous pourrez constater que le nombre 276 comprend 23 groupes de douze.*

Voici un excellent moyen de calculer cette opération : *Placez 276 points dans une machine $1 \leftarrow 10$ et vous constaterez immédiatement que ce nombre comprend 23 groupes de douze!*

Lisez ce qui suit et amusez-vous à apprendre comment nous pouvons y arriver!

Fait génial : Saviez-vous que le symbole de division est appelé *obélus*?

Pour commencer

Débutons lentement avec une division dont la réponse peut être obtenue immédiatement.

Que est le quotient de $3906 \div 3$?

La réponse est 1302 .

Si nous décomposons le nombre 3906 comme $3000 + 900 + 6$, nous pouvons voir qu'en divisant ces nombres par trois, nous obtenons $1000 + 300 + 2$.

Nous pouvons vraiment le constater en illustrant 3906 dans une machine $1 \leftarrow 10$. Nous voyons des groupes de trois : un groupe dans la boîte des milliers, trois groupes dans la boîte des centaines et deux groupes dans la boîte des unités.

Voilà! Pendant que nous effectuons la division, nous en voyons la réponse apparaître carrément sous nos yeux!

Tentez de calculer $402 \div 3$ uniquement en illustrant l'opération selon l'approche des points et des boîtes. Constatez-vous que, grâce aux « désexplosions », vous obtenez la réponse 134 ?

Et si vous souhaitez examiner en profondeur ce qui se passe réellement dans ces illustrations (est-ce vraiment si facile?), sautez à la section « Explications plus détaillées » de ce chapitre.

Par contre, si vous préférez continuer sur cette lancée dès maintenant... allons-y!

Division longue

Nous avons bien saisi le principe de la division avec un diviseur d'un chiffre. Qu'en est-il de la division avec un diviseur de plusieurs chiffres? On l'appelle généralement *division longue*.

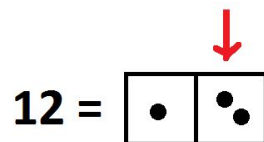
Examinons l'expression $276 \div 10$.

Voici l'illustration de $276 \div 10$ dans une machine $1 \leftarrow 10$.

Et nous cherchons des groupes de douze dans cette illustration de $276 \div 10$. Voici à quoi ressemble douze.

En fait, cette illustration est inexacte puisqu'une explosion se produirait dans notre machine $1 \leftarrow 10$. Douze sera représenté par un point dans la boîte voisine à gauche des deux points. (Cependant, nous

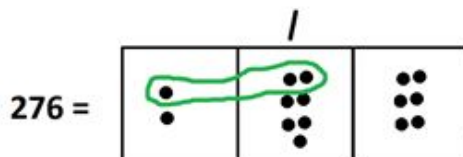
devons toujours garder à l'esprit qu'il s'agit là de l'illustration des douze points dans la boîte à l'extrême droite.)



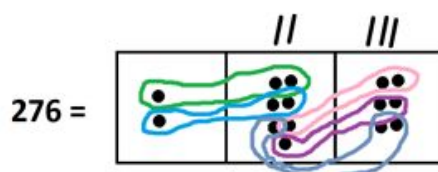
D'accord. Nous devons donc trouver des groupes de 12 dans notre illustration de 276. Apercevez-vous un groupe d'« un point à côté de deux points » dans le diagramme?

Oui. En voici un.

Dans chaque boucle de , il faut tenir compte du fait que les 12 points se trouvent du côté droit de la boucle. Nous avons ainsi trouvé un groupe de au niveau des dizaines.



Il y a davantage de groupes de douze.



Nous obtenons un total de deux groupes de 12 au niveau des dizaines et trois groupes de au niveau des unités. La réponse à $276 \div 12$ est donc 23.

Voici quelques exercices pratiques que vous pouvez tenter ou non de faire. Vous trouverez mes réponses à ces exercices à la fin de ce chapitre.

1. Calculez $2783 \div 23$ à la main, selon l'approche des points et des boîtes.

2. Calculez .

Prenons un autre exemple. Calculons $31824 \div 102$.

Voici l'illustration.

Nous devons maintenant repérer des groupes d'« un point, aucun point et deux points » dans notre illustration du nombre 31824 . (N'oubliez pas que tous les points sont physiquement situés dans la partie la plus à droite de chaque groupe que nous identifions.)

Nous pouvons voir quelques-uns de ces groupes. (Dans ce cas, je trouvais que l'utilisation de boucles pour grouper les points rendait mal le résultat. J'ai préféré utilisé des X, des cercles et des carrés. Est-ce que ça convient? Voyez-vous que j'ai inclus deux groupes dans le même carré dans la boîte à l'extrême droite?)



Il est maintenant évident que est la réponse à l'expression .

Voici quelques questions supplémentaires auxquelles vous pouvez tenter de répondre, si vous en savez envie.

3. Calculez $46632 \div 201$.

4. Illustrez la phrase numérique $31533 \div 101$ égale reste .

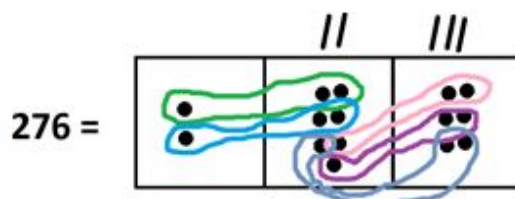
DIVISION PAR DIX

Utilisez l'approche des points et des boîtes afin de calculer $2130 \div 10$. Pouvez-vous expliquer pourquoi, après les « désexplosions », la réponse est 213 ? Repérez les groupes de dix dans votre illustration.

Beaucoup de personnes affirment que pour diviser par dix un nombre qui se termine par zéro, il suffit de barrer ce dernier zéro. Pouvez-vous maintenant expliquer pourquoi cette action permettra assurément d'obtenir la bonne réponse?

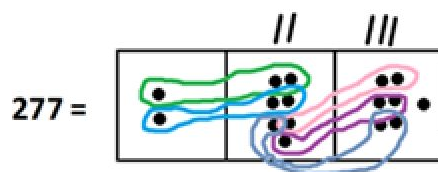
RESTES

Dans la section précédente, nous avons vu que $276 \div 12$ égale .



Imaginons que nous avons plutôt tenter de calculer . Quelle illustration aurions-nous obtenue? Comment devrions-nous interpréter cette illustration?

Eh bien! L'illustration resterait la même, à l'exception d'un point supplémentaire que nous ne pourrions inclure dans aucun groupe de douze.



Cette illustration indique que égale 23 reste 1.

Vous pouvez écrire cette phrase numérique comme

$$277 \div 12 = 23 R 1$$

ou à l'aide de notations équivalentes des restes. (Dans d'autres pays, des notations différentes sont utilisées pour indiquer les restes.) Vous pouvez également être mathématiquement plus précis en indiquant que $276 \div 12$ égale et un autre point restant à diviser par douze :

Voici quelques questions auxquelles vous pouvez répondre, si vous le souhaitez.

5. Calculez .
6. Calculez $4366 \div 14$.

7. Calculez $5481 \div 131$.

Pendant vos divisions à l'aide de l'approche des points et des boîtes, il se peut que vous réalisiez que c'est vraiment une bonne chose de toujours effectuer les calculs de la gauche vers la droite s'il y a des restes : il est préférable de trouver tous les points « en trop » dans les boîtes associées aux valeurs les moins élevées (c.-à-d. les unités et les dizaines) plutôt que dans les boîtes de valeur plus élevée, comme celle des milliers. (Néanmoins, même si vous ne travaillez pas dans ce sens, vous n'échouerez pas! Vous pourrez toujours effectuer des « désexplosions » pour vous aider.)

EXPLICATIONS PLUS DÉTAILLÉES

Si l'on se penche sur le processus de division longue, on peut constater qu'il existe des subtilités dont il importe de prendre en considération.

Procédons à un examen plus minutieux de la division. Et prenons un exemple dont nous pourrions écrire immédiatement la réponse.

Que donne $3906 \div 3$?

Réponse : .

Pourquoi parvenons-nous à trouver la réponse si rapidement?

On peut naturellement décomposer le nombre 3906 ainsi : . De plus, il est facile de diviser chacune de ces parties par trois.

Diviser

par trois donne

Excellent! Nous pouvons également constater cette décomposition naturelle du nombre 3906 dans l'illustration sous forme de points et de boîtes. Nous voyons littéralement milliers, centaines et unités.

En divisant ce nombre par trois, nous obtenons cette illustration.

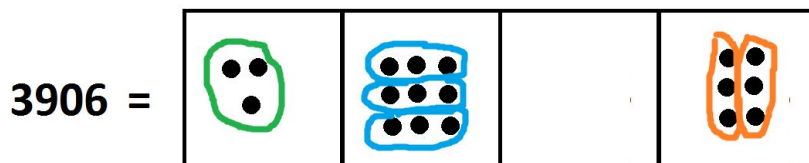
$$1302 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} & & \bullet\bullet \\ \hline \end{array}$$

Cependant, examinons encore de plus près le fonctionnement de cette étape finale de division. Que s'est-il vraiment produit?

Nous pouvons voir la division comme une opération de groupement : La question « $3906 \div 3 = ?$ » signifie aussi :

Combien de groupes de trois pouvez-vous trouver dans un ensemble de 3906 *objets*?

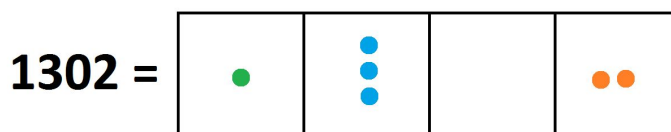
Nous savons qu'il y a un millier de groupes de trois dans points, trois-cent groupes de trois dans points et deux groupes de trois dans points. D'ailleurs, l'illustration de le démontre aussi.



Si nous faisons toutes les « désexplosions », la boucle verte désexplode en un millier de boucles vertes dans la boîte des unités. Chacune des boucles bleues désexplode en une centaine de boucles bleues dans la boîte des unités et, comme il y a trois boucles bleues ci-dessus, nous obtenons au total trois-cent boucles bleues dans la boîte des unités. Nous pouvons voir que l'illustration représente vraiment un millier de boucles vertes, trois centaines de boucles bleues et deux boucles orange. Nous avons donc groupes de trois.

Nous pouvons indiquer à l'aide de traits que nous avons groupe de trois dans la boîte des milliers, 3 groupes dans la boîte des centaines, groupe dans la boîte des dizaines et groupes dans la boîte des unités, ce qui équivaut encore une fois groupes de trois.

D'ailleurs, ces traits indiquent le résultat d'une division par trois : chaque groupe de trois points est remplacé par un point. Nous obtenons ainsi cette illustration.



Cette dernière illustration indique le nombre de groupes de trois que nous avons dans l'illustration initiale du nombre 3906 . Cependant, nous n'avons pas vraiment besoin de cette dernière illustration : les traits indiqués au-dessus de l'illustration précédente indiquaient également cette information. Nous pouvons donc cesser d'illustrer les groupes une fois que nous avons dessiné tous les traits au-dessus.

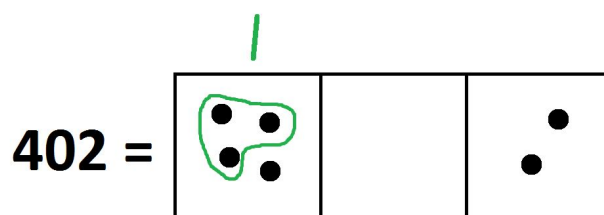
Voici un exercice pratique que vous pouvez tenter ou non de faire.

8. Illustrez selon l'approche des points et des boîtes le nombre 426 et utilisez cette illustration pour expliquer pourquoi $426 \div 2$ égale 213 .

Faisons un autre exercice avec cette opération : $402 \div 3$.

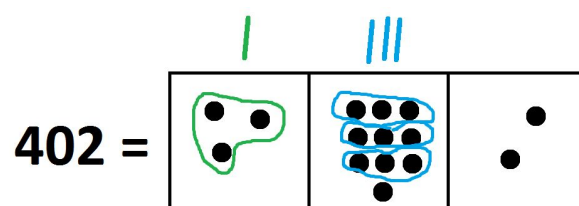
Voici l'illustration de

Nous devons établir le nombre de groupes de trois que ce nombre contient. Nous pouvons repérer un groupe dans la boîte des centaines. (Cette seule boucle représente bien une centaine de groupes de trois. Les « dés explosions » nous permettent d'obtenir ce résultat.)

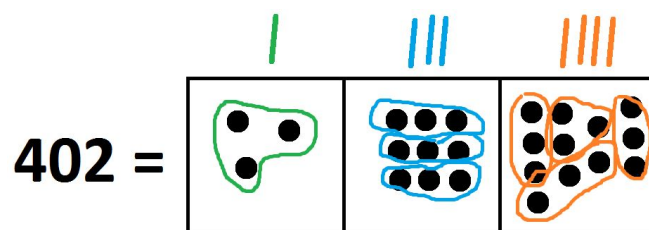


À cette étape, nous semblons ne plus pouvoir établir de groupes.

Toutefois, une « dés explosion » nous permet de poursuivre le processus!



Et nous procédons à une autre « déséxplosion ».



Nous pouvons ainsi constater que le nombre 402 contient une centaine, trois dizaines et quatre groupes de trois. Thus $402 \div 3 = 134$.

9. Nous venons de démontrer que $402 \div 3 = 134$. Selon vous, quel est donc le quotient de $404 \div 3$? Que constaterez-vous dans l'illustration de cette division?
10. Calculez l'opération $61230 \div 5$ selon l'approche des points et des boîtes.
(Trouvez-vous ennuyeux de dessiner des points? Avez-vous vraiment à le faire?)

La même logique s'applique aux divisions par un nombre à plusieurs chiffres. Nous nous sommes déjà penchés sur l'opération .

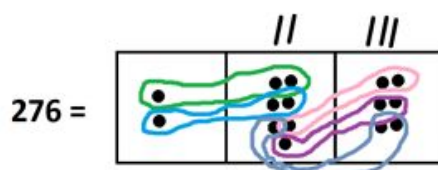
Voici l'illustration de .

Voici à quoi ressemblent douze points.

Toutefois, dans une machine $1 \leftarrow 10$, nous devrions en fait les représenter par un point à côté de deux points restants après la « déséxplosion ». (Tous les douze points demeurent tout de même dans la boîte à l'extrême droite.)

$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet\bullet \\ \hline \end{array}$$

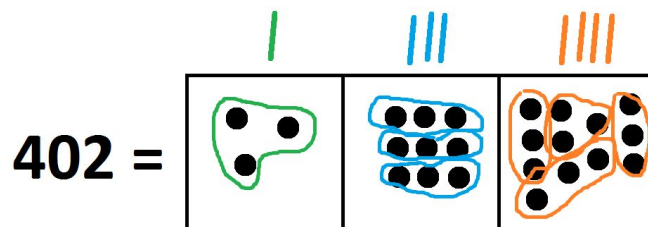
Si nous tentons de repérer des groupes de douze dans le nombre , nous obtenons cette illustration.



Nous voyons deux groupes de 12 dans la boîte des dizaines et trois groupes de dans la boîte des unités. Le quotient de $276 \div 12$ est 23 .

L'ALGORITHME TRADITIONNEL

Voici comment l'approche des points et des boîtes permet de démontrer que $402 \div 3$ égale 134 .



Cette approche ne ressemble aucunement à celle qui nous est enseignée dans les écoles pour calculer les divisions. Par exemple, de nombreuses écoles apprendront aux élèves à calculer l'opération $402 \div 3$ avec un algorithme semblable à celui-ci.

Au premier coup d'œil, ce calcul peut sembler très mystérieux, mais il est, en fait, fondé sur une méthode plutôt comparable à celle des points et des boîtes. Afin de comprendre pourquoi, explorons d'abord une méthode d'estimation de la division souvent montrée aux élèves. Voici comment faire :

Pour calculer $402 \div 3$, nous devons établir le nombre de groupes de trois que nous pouvons trouver dans le nombre .

Commençons par une première grande tentative de réponse, c'est-à-dire une centaine de groupes de trois.

$$3 \overline{)402}$$

Groups of 3
100

Combien reste-t-il si nous retirons une centaine de groupes de trois? La réponse est 102 .

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ - 300 \\ \hline 102 \end{array}$$

Groups of 3
100

Combien y a-t-il de groupes de trois dans le nombre restant de 102 ? Disons .

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ - 300 \\ \hline 102 \\ - 90 \\ \hline 12 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

Il reste donc douze, et il y a quatre groupes de trois dans ce nombre.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ - 300 \\ \hline 102 \\ - 90 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Groups of 3
100

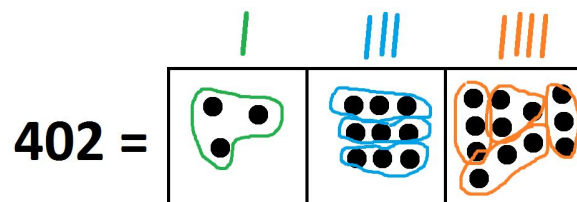
30

4

Cela nous amène au calcul du nombre total de . Nous pouvons constater qu'il y a

134 groupes de trois dans ce nombre.

L'approche des points et des boîtes suit exactement le même processus, mais de façon entièrement visuelle.



Le tableau que nous avons d'abord illustré est également identique à cette méthode d'estimation. Il a été inventé simplement pour économiser de l'encre puisque qu'il ne requiert moins de calculs écrits. (Il évite d'avoir à réécrire certains chiffres.)

EXPLORATIONS APPROFONDIES

Voici une « grande question » à explorer en profondeur ou en surface. Amusez-vous!

EXPLORATION : DE LA GAUCHE VERS LA DROITE? DE LA DROITE VERS LA GAUCHE? DANS N'IMPORTE QUEL ORDRE?

Pour calculer $121 \div 12$, Kaleb a dessiné cette illustration, en fonction des groupes de douze qu'il a repérés de la droite vers la gauche.

Il a déclaré que $121 \div 12$ égale 12 avec reste de 5.

Quant à Maribelle, elle a dessiné cette illustration en repérant des groupes de douze de la gauche vers la droite.

Elle en est arrivée à la conclusion que $121 \div 12$ égale 21 avec reste de 20.

Les réponses de Kaleb et de Maribelle sont toutes les deux exactes. Cependant, l'enseignante a souligné le fait que la plupart des gens s'attendent à une réponse avec un reste inférieur : un reste de 5 ou de 20 semble étrange comme résultat d'une division par douze. Elle a également montré à Kaleb et à Maribelle la réponse au problème qui est indiquée dans le manuel.

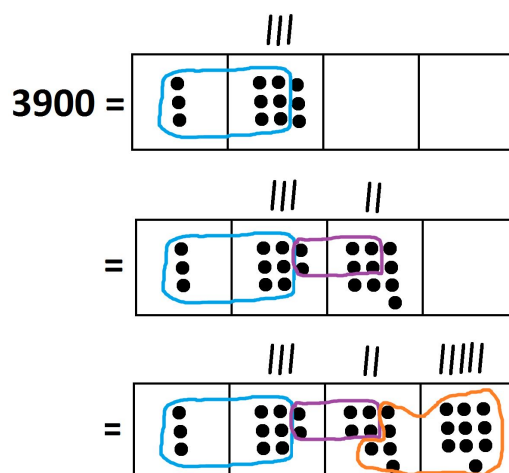
De quelle façon Kaleb et Maribelle peuvent-ils continuer leur processus d'illustration afin d'arriver à la réponse indiquée dans le manuel?

SOLUTIONS

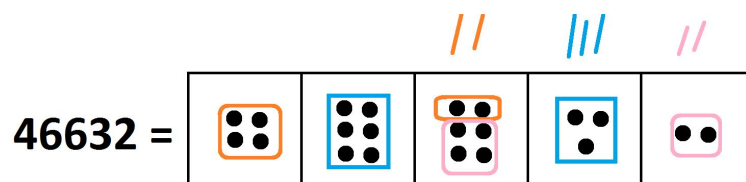
Comme convenu, voici mes solutions aux questions posées.

1. $2783 \div 23 = 121$.

2. $3900 \div 12 = 325$. Nous devons procéder à quelques « désexplosions ». (Constatez-vous comment je parviens à dessiner efficacement les boucles?)



3. .

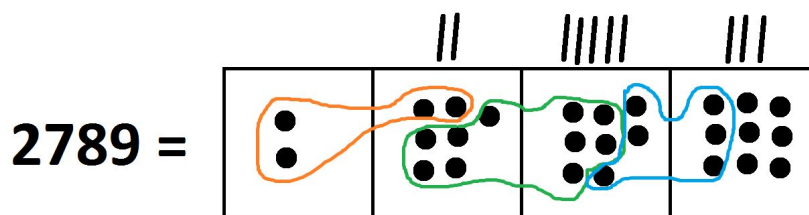


$$201 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array}$$

4.

5. La phrase numérique est _____ avec reste de _____, c'est-à-dire

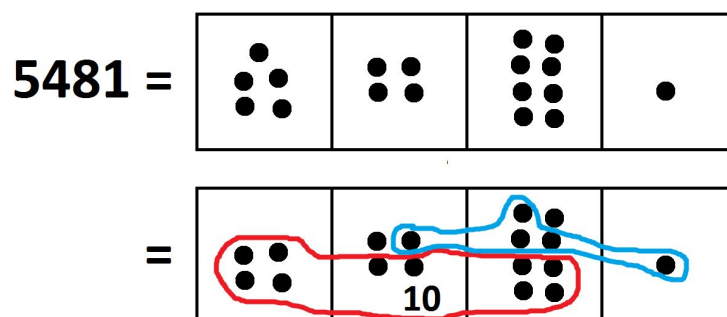
$$2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}.$$



$$11 = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

6.

7.



8. Nous pouvons constater qu'il y a deux groupes de deux dans la boîte des centaines (tous les points contenus dans les boucles bleues « désexplorent » pour donner deux-cent groupes de deux entourés en bleu dans la boîte des unités), un groupe de deux dans la boîte des dizaines (tous les points compris dans la boucle verte « désexplorent » pour donner dix groupes de deux entourés en vert dans la boîte des unités) et trois groupes de deux entourés en orange dans la boîte des unités. Cela représente

213 groupes de deux.

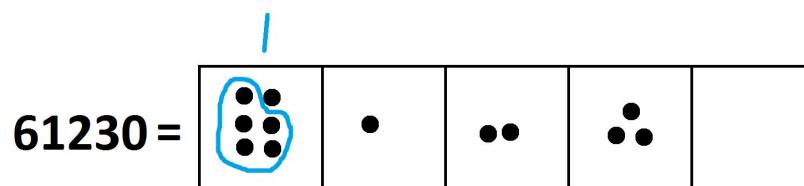
9. Dans l'illustration de l'opération , il reste deux points non entourés.

Cela signifie que $404 \div 3$ égale avec un reste de .

Remarque : Nous pouvons voir ce reste comme « deux points devant tout de même être divisés par trois ». Nous écrivons ainsi

$$404 \div 3 = 134 + \frac{2}{3} .$$

10. Nous pouvons assurément repérer un groupe de cinq immédiatement.



Procédons à quelques « désexplosions ». (Et écrivons des nombres au lieu de dessiner une foule de points. Il peut s'avérer fastidieux de dessiner tous ces points!)

Nous pouvons constater que .