

## ТАЧКЕ КОЈЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ ПОГЛАВЉЕ 5

### ДЕЉЕЊЕ

Сабирање, одузимање, множење. Сад је ред на дељење.

Ево једног задатка с дељењем: израчунајте колико је  $276 \div 12$ .

Наравно да постоји застрашујући начин да то урадите: *Нацртајте на папиру 276 тачака и затим заокружите групе од по дванаест. Видећете, после једно сат времена, да постоје 23 групе од по дванаест на слици која представља број 276.*

Ево феноменалног начина да решите задатак: *Нацртајте слику која приказује 276 тачака у машини  $1 \leftarrow 10$  и једноставно одмах уочите да на слици постоје постоје 23 групе од по дванаест!*

Наставите да читате и да се играте како бисте открили начин на који ово можемо да урадимо!

**Страва чињеница:** Да ли сте знали да се симбол који означава дељење ( $\div$ ) назива *обелус*<sup>1</sup>?

### ПОЧИЊЕМО

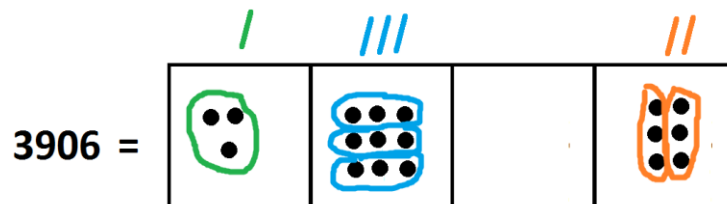
Хајде да почнемо са задатком у коме треба поделити два броја чији се количник може одмах видети.

*Колико је  $3906 \div 3$ ?*

Резултат је 1302.

Ако број 3906 посматрате као збир  $3000 + 900 + 6$ , онда се лако може уочити да се дељењем с три добија збир  $1000 + 300 + 2$ .

То можемо и да видимо, ако нацртамо слику броја 3096 у машини  $1 \leftarrow 10$ . Видимо групе од по три тачке: једну групу на нивоу хиљада, 3 групе на нивоу стотина и две групе на нивоу јединица.



<sup>1</sup> Од грчке речи  $\acute{o}\beta\epsilon\lambda\acute{o}\varsigma$  (obelós) која, поред тога што означава зашиљени четвртасти стуб, познатији као обелиск, има и значење хоризонтална линија. Према Стритеру, у употребу ју је увео Аристарх из Самотраке како би у Хомеровим делима означио делове текста за које је сумњао да су накнадно убацивани. Међутим, хоризонтална линија са тачком изнад и испод ( $\acute{o}\beta\epsilon\lambda\acute{o}\varsigma$   $\pi\epsilon\rho\iota\sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\varsigma$ , obelòs peristigménos) коришћена је нарочито у филозофским текстовима да означи делове који су се сматрали вишком. У математичкој нотацији, обелус се најпре користио као ознака за одузимање, а први га је као ознаку за дељење употребио Швајцарац Јохан Ран 1659. у својој књизи *Teutsche Algebra*.

И то је то! Делимо бројеве и одмах из авиона видимо резултат дељења!

Покушајте да израчунате колико је  $402 \div 3$  тако што ћете користити само слику кутија и тачака. Да ли видите да користећи одексплозије можете „одблокирати“ задатак и показати да је резултат 134?

Ако желите боље да размислите о томе шта се заправо дешава на овим сликама (зар је то заиста толико једноставно?) пређите на одељак „Детаљније објашњење“ у овом поглављу.

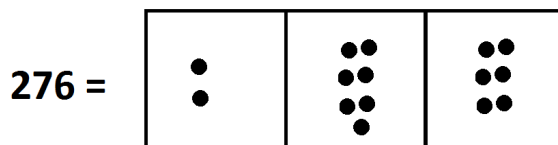
Али, ако сте ипак спремни да одмах наставимо... хајде да наставимо!

## ПИСМЕНО ДЕЉЕЊЕ

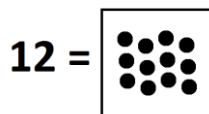
Дељење једноцифреним бројем смо сада схватили. Али, шта ћемо с дељењем бројевима који имају више од једне цифре? Такво дељење обично се назива *писменим дељењем*.

Погледајмо следећи задатак:  $276 \div 12$ .

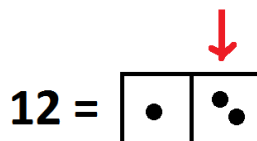
Ево слике броја 276 у машини  $1 \leftarrow 10$ :



На овој слици броја 276 треба открити групе од по дванаест тачака. Прво, ево како изгледа слика броја дванаест:

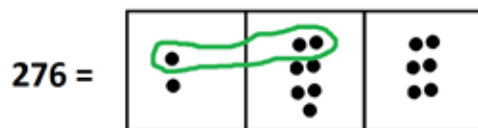


Уствари, то баш и није тачно, пошто ће се десети једна експлозија у нашој машини  $1 \leftarrow 10$ , дванаест ће имати облик једне тачке која се налази поред две тачке. (Али, увек треба да будемо свесни да је то заправо слика дванаест тачака које се налазе у крајњој десној кутији.)

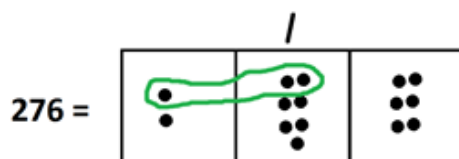


У реду. Дакле, тражимо групе од по 12 на нашој слици броја 276. Да ли можемо да уочимо, било где на дијаграму, једну тачку која се налази одмах поред две тачке?

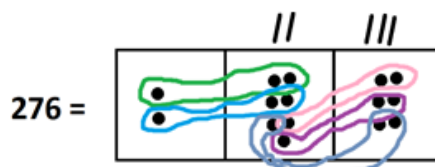
Да! Ево једног примера.



За сваку заокружену област, у којој се налази 12 тачака које смо нашли, важи да се тих 12 тачака заправо налазе у десном делу нацртане области. Тако смо нашли једну групу од 12 тачака на нивоу десетица.



И има још група с дванаест тачака.



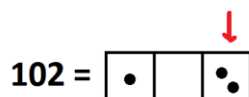
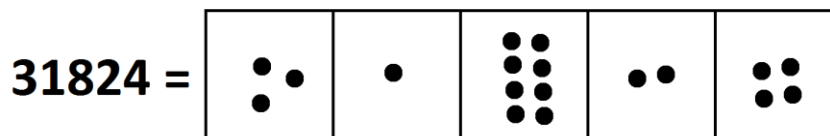
Видимо укупно две групе од по дванаест на нивоу десетица и три групе од по дванаест на нивоу јединица. Према томе, резултат дељења 276 са 12 је 23.

Ево неких задатака за вежбу, које ћете можда покушати да урадите, а можда и нећете. Моји одговори на сва постављена питања могу се наћи на крају поглавља.

1. Израчунајте писмено  $2783 \div 23$  користећи приступ помоћу кутија и тачака.
2. Израчунајте  $3900 \div 12$ .

Хајде да урадимо још један пример. Израчунајмо колико је  $31824 \div 102$ .

Ево одговарајуће слике.



Сада тражимо групе састављене од једне тачке, ниједне тачке, две тачке на нашој слици која представља број 31824. (И, не заборавите, све те 102 тачке физички се налазе у крајњој десној кутији сваког скупа који уочимо.)

Можемо да приметимо више таквих група. (У овом тренутку чини ми се да заокруживање тачака компликује цртеж, па уместо тога користим иксиће и цртам око тачака кругове и квадрате. Да ли је то у реду? Да ли сте приметили како сам на самом крају једним потезом означио две групе?)



Сада је очигледно да је резултат дељења 31824 са 102 управо 312.

Ево још задатака, ако желите да пробате да их решите.

3. Израчунајте  $46632 \div 201$ .
4. Покажите да је  $31533 \div 101$  једнако 312 уз остатак 21.

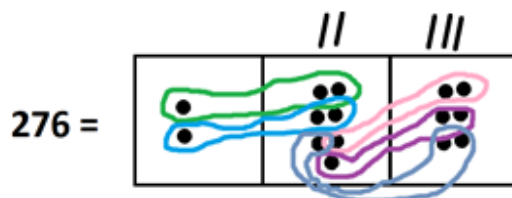
### ДЕЉЕЊЕ С ДЕСЕТ

Икористите кутије и тачке да израчунате  $2130 \div 10$ . Можете ли да објасните зашто ће, уз примену одекслподирања, резултат бити 213? Потражите групе од по десет тачака на слици коју сте нацртали.

Већина људи каже да је при дељењу броја који се завршава нулом са 10 довољно прецртати последњу нулу дељеника. Можете ли сада да објасните зашто ће такав потез сигурно дати тачан резултат?

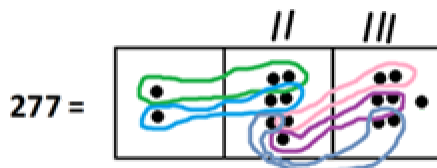
## ОСТАЦИ

У претходном одељку видели смо да је  $276 \div 12$  једнако 23.



Претпоставимо да смо, уместо тога, покушали да израчунамо  $277 \div 12$ . Како би изгледала слика у том случају? Како би требало да је тумачимо?

Па, слика ће бити врло слична претходној, осим што ће се на њој појавити једна додатна тачка, коју нећемо успети да обухватимо ниједном од група сачињених од дванаест тачака.



Ова слика показује да је  $277 \div 12$  једнако 23 уз остатак 1.

То би могло да се запише на следећи начин:

$$277 \div 12 = 23, \text{ уз остатак } = 1$$

или уз помоћ неке друге еквивалентне нотације. (У различитим земљама људи користе различите ознаке за остатке.) Такође, можете да budete математички мало прецизнији и можете да кажете да је  $277 \div 12$  једнако 23 и да преостаје једна тачка вишка коју треба поделити с дванаест:

$$277 \div 12 = 23 + \frac{1}{12}$$

Ако сте расположени, ево још задатака за вежбу.

5. Израчунајте  $2789 \div 11$ .
6. Израчунајте  $4366 \div 14$ .
7. Израчунајте  $5481 \div 131$ .

Док се будете играли с дељењем помоћу тачака и кутија, можда ћете закључити да је уствари добро увек радити с леве стране на десну, за случај да има остатака: свиђа нам се да се све „додатне“ тачке које видимо појаве у тежински нижим кутијама, онима које одговарају јединицама и десетицама, уместо у кутијама које одговарају хиљадама, на пример. (Али, чак и да одлучите другачије, нећете погрешити! Увек ћете моћи да позовете у помоћ одексплозије.)

## ДЕТАЉНИЈЕ ОБЈАШЊЕЊЕ

Мозгајући о процесу писменог дељења, схватићете да се ту дешавају неке суптилне ствари.

Хајде да одвојимо мало времена и размотримо дељење мало детаљније. И хајде да почнемо с примером чији резултат можемо одмах да запишемо.

*Колико је  $3906 \div 3$ ?*

*Резултат: 1302.*

На основу чега можемо тако брзо да видимо да је то резултат?

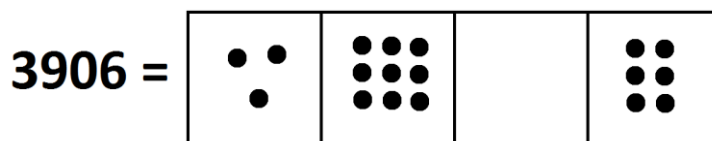
Делује потпуно природно да број 3906 посматрамо као збир  $3000 + 900 + 6$ . Сада је лако поделити сваки од тих сабирака с три.

Делећи  $3906 = 3000 + 900 + 6$

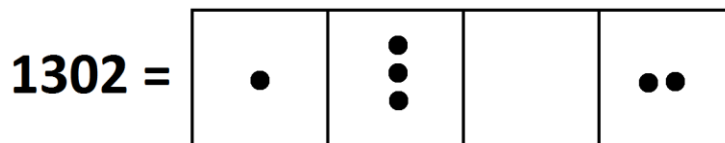
с три, добијамо

$3906 \div 3 = 1000 + 300 + 2 = 1302$ .

Страва! А то природно растављање можемо да видимо и на слици броја 3906 приказаног помоћу тачака и кутија. Заиста видимо 3 хиљаде, 9 стотина и 6 јединица.



Делећи с три, добијамо следећу слику:

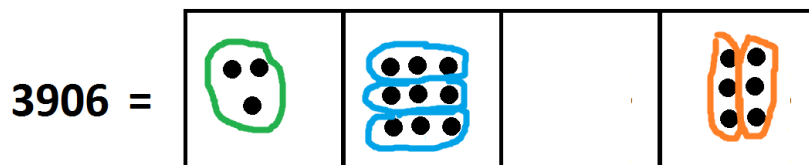


Али, хајде да још дубље истражимо како функционише овај последњи корак дељења. Шта се овде заиста догодило?

Дељење можемо да посматрамо као груписање, тако да нас задатак „ $3906 \div 3 = ?$ “ уствари пита

*Колико група од по три можете наћи у скупу који има 3906 елемената?*

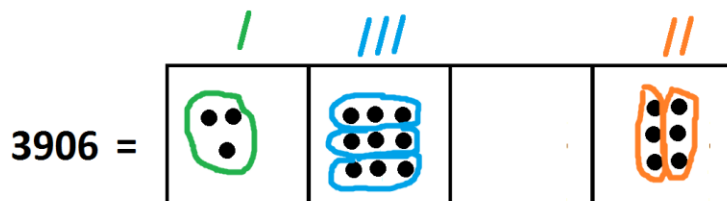
Знамо да 3000 тачака имају хиљаду група од по три тачке, 900 тачака имају триста група од по три тачке, а 6 тачака садрже две групе од по три тачке. Заправо, наша слика броја 3906 управо то и показује.



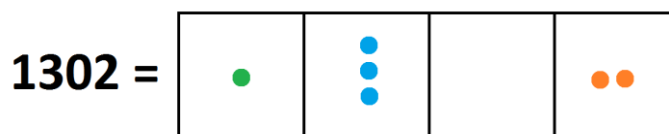
Да смо извршили све одексплозије, зелена група би одексплодирала и послала хиљаду зелених група на место јединица. Свака плава група би након одексплозије послала стотину плавих група на место јединица, а пошто постоје три плаве групе, добили бисмо укупно триста плавих група на

месту јединица. Примећујемо да наша слика приказује хиљаду зелени група, триста плавих група и две наранџасте групе. На њој је приказано 1302 групе од по три.

Можемо да употребимо рецке да бисмо показали да ћемо добити 1 групу од три на месту хиљада, 3 на месту стотина, 0 на месту десетица и 2 на месту јединица, што је поново 1302 групе од по три.



А те рецке нам показују шта ће се десити уколико бисмо стварно делили с три: свака група од по три тачке постаје једна тачка. Добили бисмо овакву слику:



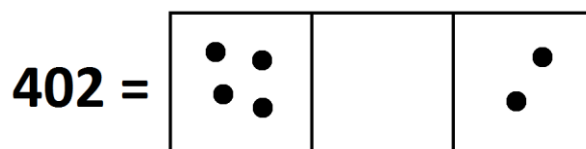
Та последња слика показује колико група од по три је било на полазној слици броја 3096. Али, ова последња слика нам уствари уопште није потребна: рецке на претходној слици показују управо исто то. Зато можемо да престанемо да цртамо чим дођемо до свих рецки.

Ево још једног задатка за вежбу који ћете можда желети да урадите, а можда и нећете.

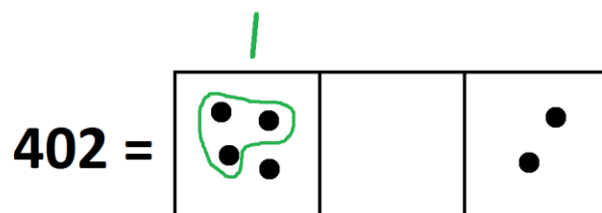
8. Користећи тачке и кутије, нацртајте број 426 и искористите ту слику да објасните зашто је  $426 \div 2$  једнако 213.

Хајде да урадимо још један пример. Пробајмо да израчунамо  $402 \div 3$ .

Ево слике броја 402.

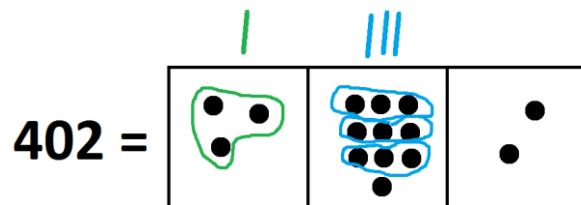


Тражимо на њој групе од по три тачке. Једну уочавамо на нивоу стотина. (Ова заокружена група заиста представља сто група од по три. То је директна последица одексплозија.)

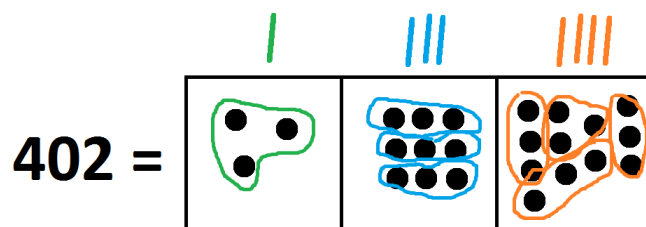


Сад смо се, изгледа, заглавили.

Али, једна одексплозија ће нам помоћи да наставимо даље!



Па још једна одексплозија.



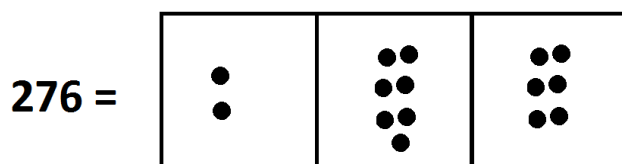
Сада видимо да постоји једна стотина, тридесет и још четири групе од по три у броју 402. Због тога је  $402 \div 3 = 134$ .

9. Управо смо показали да је  $402 \div 3 = 134$ . Шта мислите да ће, с обзиром на то, бити резултат дељења  $404 \div 3$ ? Шта бисте видели на слици која одговара овом дељењу када бисте је нацртали?
10. Израчунајте колико је  $61230 \div 5$ , користећи тачке и кутије.

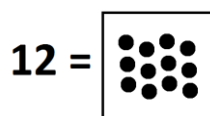
(Да ли постаје заморно да се цртају толике тачке? Да ли заиста морате да их све нацртате?)

У потпуности исти начин размишљања може се применити на дељење вишецифреним бројевима. Раније смо разматрали пример  $276 \div 12$ .

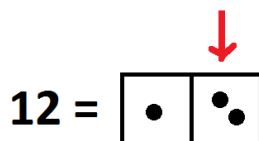
Ево слике броја 276.



Ево како изгледа дванаест тачака:

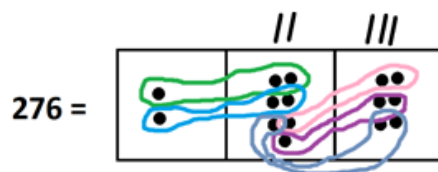


Али, у машини  $1 \leftarrow 10$  видели бисмо их као једну тачку поред две тачке, након што би се одиграла једна експлозија. (Свих дванаест тачака и даље живе у крајњој десној кутији.)





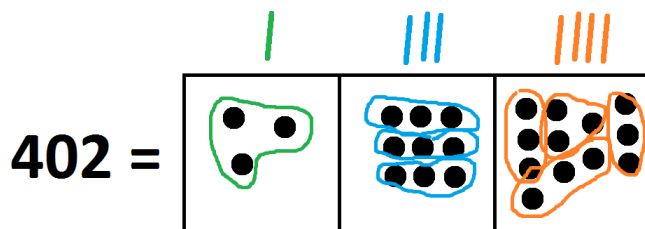
И када сад кренемо у лов на групе од по дванаест у броју 276, добићемо следећу слику:



Видимо две групе од по дванаест на нивоу десетица и три дванаестице на нивоу јединица. Резултат дељења  $276 \div 12$  је заиста 23.

## ТРАДИЦИОНАЛНИ АЛГОРИТАМ

Ево како помоћу тачака и кутија показујемо да је  $402 \div 3$  једнако 134.



То нимало не личи на приступ који се обично учи у школама када треба решити задатке са дељењем. На пример, у многим школама ће се од ђака очекивати да израчунају колико је  $402 \div 3$  употребом алгорита који изгледа некако овако:

$$\begin{array}{r}
 134 \\
 3 \overline{)402} \\
 \underline{3} \phantom{0} \phantom{2} \\
 10 \phantom{2} \\
 \underline{9} \phantom{2} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 0
 \end{array}$$

На први поглед ово се чини веома тајанственим, али се уствари уопште не разликује од поступка који користи тачке и кутије. Да бисмо увидели зашто, хајде да прво истражимо један поступак процене који се такође често предаје у школама. Он гласи овако:

Да бисмо израчунали колико је  $402 \div 3$ , морамо да утврдимо колико група од по три можемо да нађемо у броју 402.

Прво ћемо да покушамо са неком грубом проценом, рецимо, сто група од по три.

$$\begin{array}{r}
 \text{Groups of 3} \\
 3 \overline{)402} \qquad 100
 \end{array}$$

Колико нам остане након што одузmemo сто група од по три? Одговор: 102.

$$\begin{array}{r}
 \text{Groups of 3} \\
 3 \overline{)402} \qquad 100 \\
 - 300 \\
 \hline
 102
 \end{array}$$

Колико група од по три има у том остатку 102? Претпоставимо да их је 30.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 -300 \\
 \hline
 102 \\
 -90 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Groups of 3  
100  
  
30

Сада је остатак дванаест. А у дванаест постоје четири групе од по три.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 -300 \\
 \hline
 102 \\
 -90 \\
 \hline
 12 \\
 -12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Groups of 3  
100  
  
30  
  
4

Тако смо исцрпели цео број 402. Видимо да постоје 134 групе од по три у том броју.

Метод који користи тачке и кутије ради апсолутно исто, само што то ради у потпуности визуелно.

$$402 = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} | \\ \hline \bullet \bullet \\ \bullet \end{array} & \begin{array}{c} ||| \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} & \begin{array}{c} |||| \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

Табелица коју смо прву приказали такође је идентична овом поступку процене. Измишљена је само да бисмо користили мање мастила пошто се у том случају не пише овако пуно. (Прескаче се поновно записивање неких цифара.)

$$\begin{array}{r}
 134 \\
 3 \overline{)402} \\
 \underline{3} \downarrow \\
 10 \downarrow \\
 \underline{9} \downarrow \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 -300 \\
 \hline
 102 \\
 -90 \\
 \hline
 12 \\
 -12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Groups of 3  
100  
  
30  
  
4

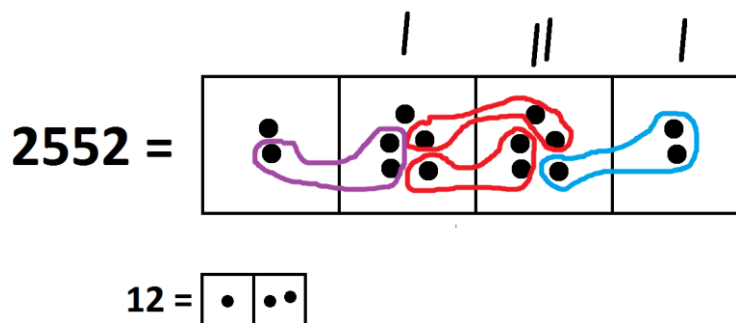


## ФАНТАСТИЧНА ИСТРАЖИВАЊА

Ево једног истраживања које се односи на „важно питање“ на које ћете можда покушати да одговорите или макар да размислите о њему. Уживајте!

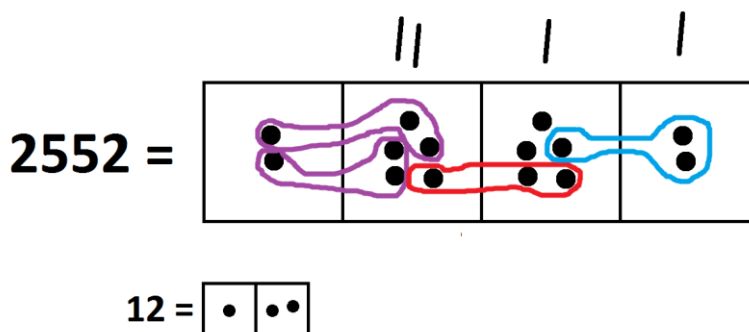
### ИСТРАЖИВАЊЕ: С ЛЕВА НА ДЕСНО? С ДЕСНА НА ЛЕВО? ПОСТОЈИ ЛИ РЕДОСЛЕД?

Пошто је добио задатак да израчуна колико је  $2552 \div 12$ , Коста је нацртао следећу слику, коју је добио тако што је уочио групе од по дванаест, гледајући с десна на лево.



Одговорио је да резултат дељења  $2552 \div 12$  износи 121, уз остатак 1100.

С друге стране, Милица је учила групе од по дванаест посматрајући своју слику истог задатка с лева на десно.



Закључила је да је  $2552 \div 12$  једнако 211, уз остатак 20.

И Коста и Милица су у праву с математичке тачке гледишта, али је њихов наставник указао на то да би већина људи очекивала одговор са мањим остатком: и 1100 и 20 би вероватно звучали чудно као остатак при дељењу са дванаест. Такође им је показао резултат дељења наведен у уџбенику.

$$2552 \div 12 = 212, \text{ уз остатак } 8$$

Како би Коста и Милица могли да наставе да раде на својим дијаграмима, па да добију резултат из уџбеника?



## РЕШЕЊА

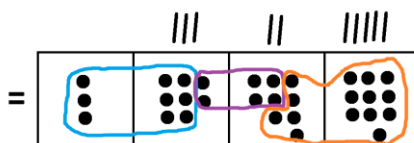
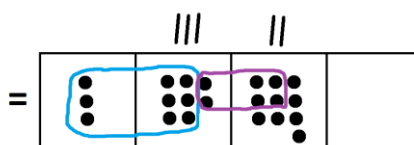
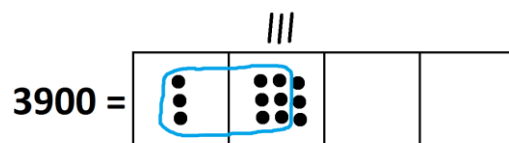
Као што сам и обећао, следе моји одговори на постављена питања.

1.  $2783 \div 23 = 121$ .

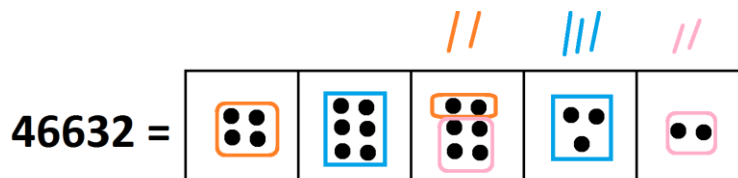


$23 =$

2.  $3900 \div 12 = 325$ . Успут морамо да извршимо неке одексплозије. (И примећујете ли како постајем све ефикаснији када је у питању заокруживање тачака?)

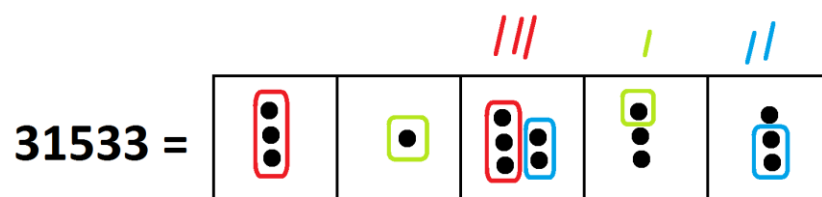


3.  $46632 \div 201 = 232$ .

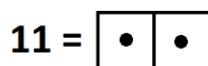
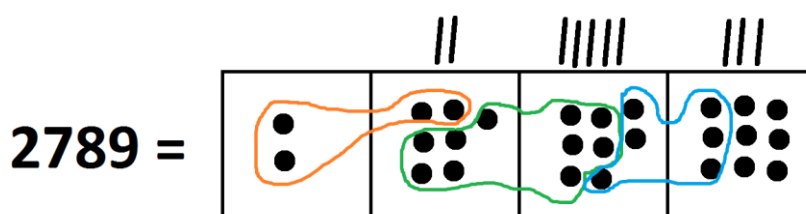


$201 =$

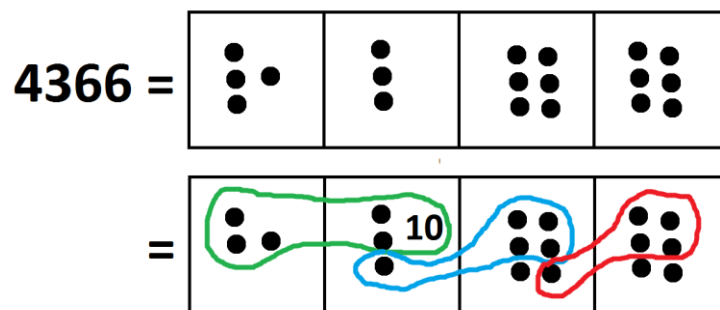
$$4. 31533 \div 101 = 312.$$



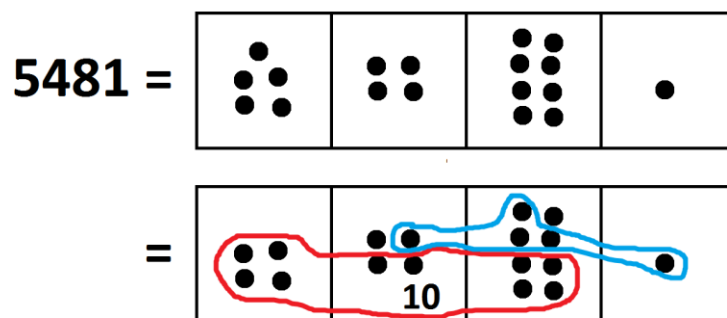
$$5. \text{ Биће } 2789 \div 11 = 253, \text{ уз остатак } 6. \text{ Другим речима, } 2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}$$



$$6. 4366 \div 14 = 311 + \frac{21}{14}.$$



$$7. 5481 \div 131 = 41 + \frac{110}{131}.$$



8. Видимо две групе од по два на нивоу стотина (све тачке у плавим групама могле би да одексплодирају и да пошаљу двеста скупова од по две тачке на ниво јединица), једну групу од два на нивоу десетица (све тачке у зеленој групи могле би да одексплодирају и да пошаљу десет зелених група од по два на ниво јединица), и три наранџасте групе од по два на месту јединица. Укупно, оне чине 213 група од по два.

$$426 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Blue group of 2 dots} & \text{Green group of 2 dots} & \text{Three orange groups of 2 dots} \\ \hline \end{array}$$

9. На слици која приказује  $404 \div 3$  видимо две тачке вишка које нису убројане у резултат.

$$404 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Green group of 2 dots} & \text{Blue groups of 2 dots} & \text{Three orange groups of 2 dots} \\ \hline \end{array}$$

Зато је  $404 \div 3$  једнако 134, уз остатак 2.

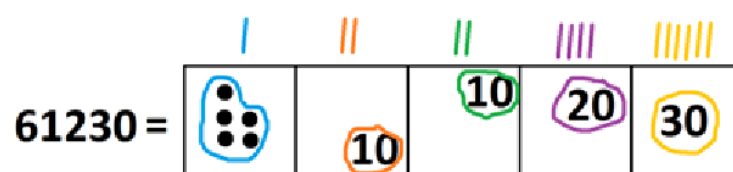
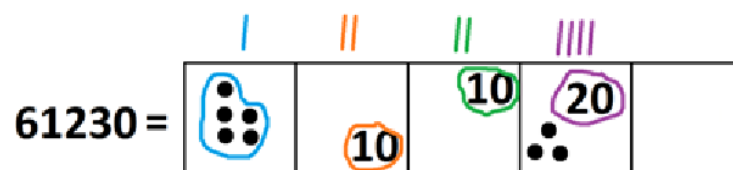
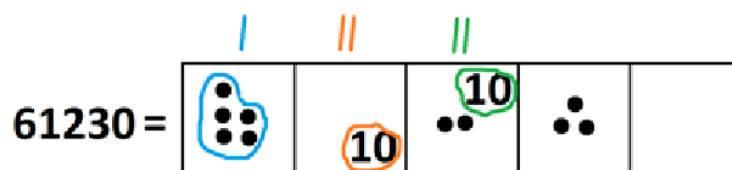
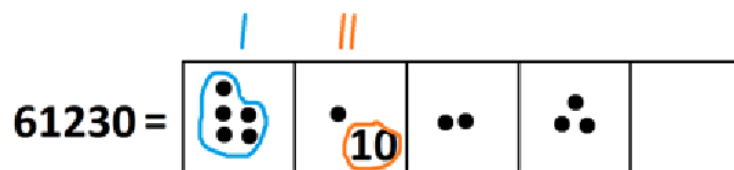
**Напомена:** Могли бисмо да посматрамо тај остатак као „две тачке које треба поделити на три дела“, и према томе, могли бисмо писати

$$404 \div 3 = 134 + \frac{2}{3}.$$

10. Сасвим сигурно једну групу можемо одмах да уочимо.

$$61230 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{Blue group of 6 dots} & \text{1 dot} & \text{2 dots} & \text{3 dots} & \text{0 dots} \\ \hline \end{array}$$

Хајде да извршимо неке одексплозије. (И пишимо бројеве уместо да цртамо гомиле тачака. Цртање тачака постаје напорно!)



Видмо да је  $61230 \div 5 = 12246$ .