EXPLODING DOTS
CHAPTER 6

ALL BASES, ALL AT ONCE

前面几章我们从一个新的角度重新学习了很多小学初中阶段的数学知识，下面我们一起来学习高中以及高中以上阶段的数学。

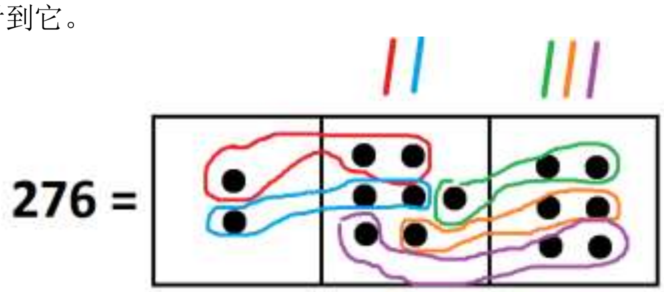
但是事实是：已经没什么新的东西了，因为之前我们其实把所有的工作都做好了。

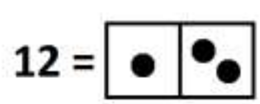
我们需要注意的唯一一点是，我们之前提到的$1 \leftarrow 10$机制没什么特别的，所有的小学初中阶段的数学我们都可以在一个$1 \leftarrow 2$机制里做到，或者是$1 \leftarrow 5$机制，甚至是$1 \leftarrow 37$机制。数学本身和用哪个机制并没有直接的关系，只不过我们人类更习惯数字 10，这也是为什么我们偏向于使用$1 \leftarrow 10$。

接下来让我们一起看看我们之前都做了什么，而且我们可以使用所有的机制。听起来很不现实？事实上很简单。

任何基数下的除法

下图是我们之前做的$276 \div 12$，我们用的是 $1 \leftarrow 10$ 机制. 我们可以看到答案是 23. 盯着这幅图看看，待会我们还会再看到它。



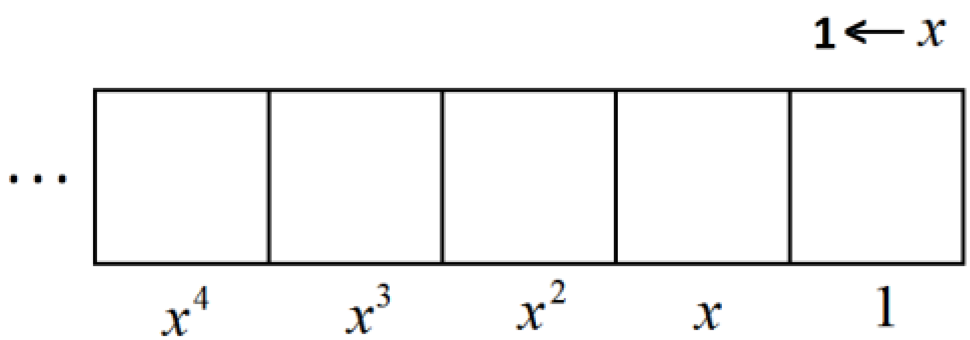


现在我们取一个不同的基来解决这个问题。不过我先不会告诉你我们取的是哪个。可能是$1 \leftarrow 2$，或者 $1 \leftarrow 4$ ，或者 $1 \leftarrow 13$ 机制。 你暂时不会知道。
高中数学我们都喜欢用同一个字母来表示未知变量，那就是 x 。

所以我就先假设我们用的是$1 \leftarrow x$ 机制，其中的 x 是一个数值， 用来表示我们使用的基数。

在$1 \leftarrow 10$ 机制里面，框里面的数字其实代表了 10 的指数： $1, 10, 100, 1000, \ldots$.
在$1 \leftarrow 2$ 机制里面，框里面的数字其实代表了 2 的指数：$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.
等等。

所以在一个 $1 \leftarrow x$ 机制里面, 框里面的数字其实代表了 x 的指数。



所以，假设我告诉你 x 实际上是 10 ， 那么$1, x, x^2, x^3, \ldots$ 就变成了$1, 10, 100, 1000, \ldots$, 也就是说我们使用的是$1 \leftarrow 10$ 机制。 如果我告诉你 x 实际上是2 ， 那么$1, x, x^2, x^3, \ldots$ 就变成了$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, 也就是说我们使用的是$1 \leftarrow 2$ 机制。

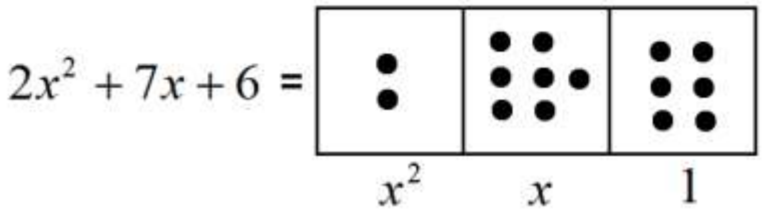
所以 $1 \leftarrow x$ 机制取决于 x 的值，它其实代表了所有的机制。

好了，我们先来看一道高中数学题：

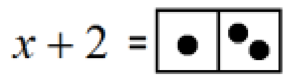
$$\boxed{\text{计算}\left(2x^2 + 7x + 6\right) \div \left(x + 2\right).}$$

你能猜猜在$1 \leftarrow x$ 机制里这道题是什么意思吗？看下面的解释之前先来自己试试吧。

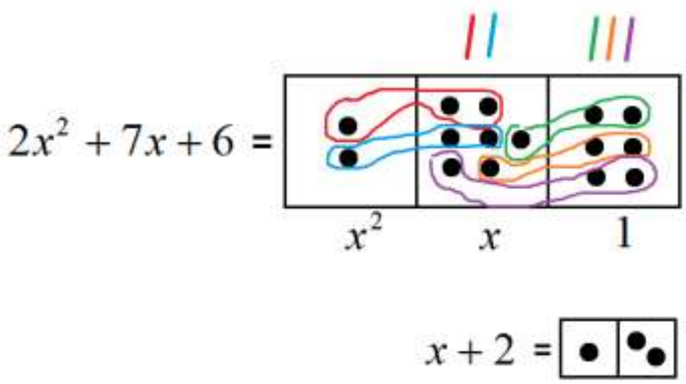
下面的图告诉我们$2x^2+7x+6$ 在 $1\leftarrow x$ 机制里是什么样子。有两个 x^2，七个 x,和六个 1。



下图是 $x+2$：



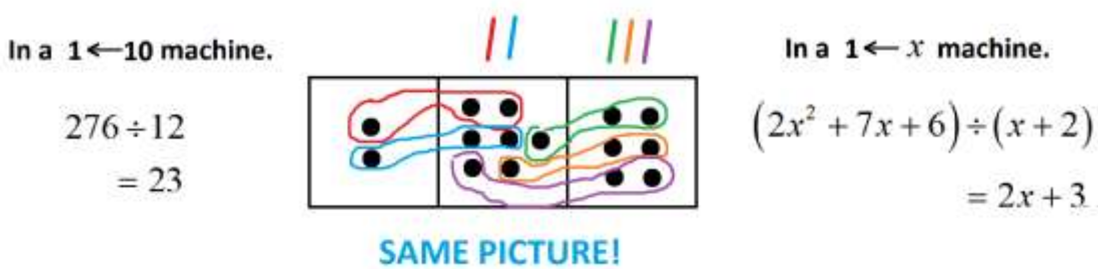
这个除法问题$\left(2x^2+7x+6\right)\div\left(x+2\right)$需要我们找到在$2x^2+7x+6$的图里一共有多少组$x+2$ 。



在x位上我们看到有两个$x+2$，在个位数上我们看到有三个$x+2$。所以答案是$2x+3$。

好好看看这幅图：$\left(2x^2+7x+6\right)\div\left(x+2\right)=2x+3$. 看起来熟悉吗？

我们其实刚刚做的高中阶段的除法问题，本质上是一个初中的代数问题。



这是怎么回事？

如果我一开始就告诉你 x 的值是 10 ，那么 $2x^2+7x+6$ 事实上等于 $2\times100+7\times10+6$, 也就是 276。 $x+2$ 等于 $10+2$，也就是 12。所以我们其实是在计算 $276\div12$。同时我们之前得到的 $2x+3$，也等于 $2\times10+3=23$，和 $276\div12$ 的结果是一样的。

所以事实上我们只是重复了以前做的那个初中阶段的代数问题。

如果我告诉你 x 的值是 2，那这个问题就变成了：

$2x^2+7x+6=2\times4+7\times2+6$ 也就是 28,

$x+2=2+2$, 也就是 4,

$2x+3=2\times2+3$, 也就是 7.

所以我们实际计算了 $28\div4=7$！

所以在 $1\leftarrow x$ 机制里面做除法运算相当于我们同时做了无数个除法问题。

现在你来试试看在 $1\leftarrow x$ 机制里面计算 $\left(2x^3+5x^2+5x+6\right)\div\left(x+2\right)$ ，你可以得到 $2x^2+x+3$ 吗？ （如果我告诉你 x 的值是 10 ，你能看出来这个问题实质上是 $2556\div12=213$ 吗?）

在高中，多项式的概念就是用 $1\leftarrow x$ 机制来表示数字。它们就像是用基数 10 来表示数字，只不过基数是用 x 来表示的。（当然如果有人告诉你 x 实际上就是 10，那它们就真的是最常见的以 10 为基数的数字了。）
一旦你理解了这个概念，高中代数就变得无比直接：重复初中阶段学到的以 10 为基数的代数而已。

下面有一些练习题，你可以自己试试。在本章的最后我会给出答案。

1. a) 计算 $\left(2x^4+3x^3+5x^2+4x+1\right)\div\left(2x+1\right)$.

b) 计算 $\left(x^4+3x^3+6x^2+5x+3\right)\div\left(x^2+x+1\right)$.

如果这两道题里 x 的值是 10 ，你能把它们转化成普通的代数问题吗？

2. 下面是一个多项式的除法，你能找到答案吗？（你需要特别注意什么呢？）

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^2+3}$$

3. 证明 $\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)\div\left(x+1\right)$ 等于 x^3+3x^2+3x+1.

a) 当 $x=10$ 时，这个问题说明了什么?
b) 当 $x=2$ 时，这个问题说明了什么?
c) 当 x 分别等于 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 和 11 时，这个问题说明了什么?
d) 当 $x=0$ 时，这个问题说明了什么?
e) 当 $x=-1$ 时呢?

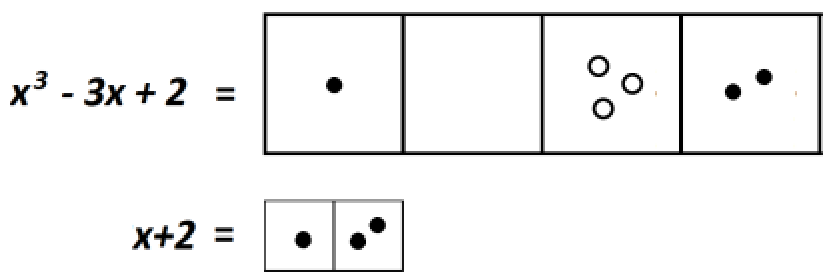
A PROBLEM
问题

现在我们已经准备好去解决高等代数的问题，不过我得先承认我没有把所有的知识都告诉你。我特意选了之前的例子，它们都很容易解决。现实是我们的方法对许多例子并不太适用。

比如，下面的这个除法：

$$\frac{x^3-3x+2}{x+2}\,.$$

你现在看出来我们之前没有接触什么吗？对了，负数。我们可以先把这两个多项式在$1 \leftarrow x$机制里画出来：



我们应该在x^3-3x+2里看到一个点挨着两个点（也就是 x+2），可是根本没有！怎么办？你能想出一个好办法吗？ 有人会建议我们直接让某些点收敛，这个办法听起来不错，但是我们 不知道 x 是什么，所以也不知道真的收敛一个点的话，该把它变成几个点呢？
我们需要想一个聪明的办法，或者难道我们这个方法压根就不能解决有负数的多项式吗？

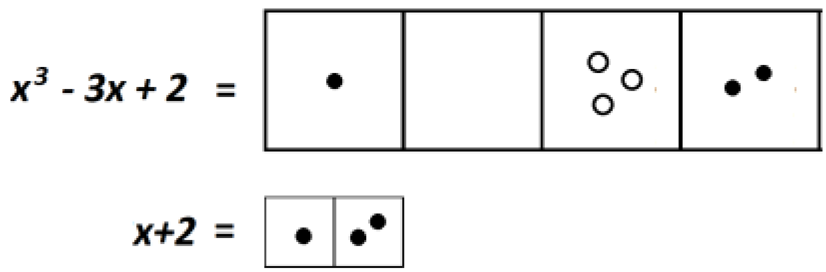
你觉得呢？

解决方法

再来看下我们解决不了的这个除法问题：

$$\frac{x^3-3x+2}{x+2}$$

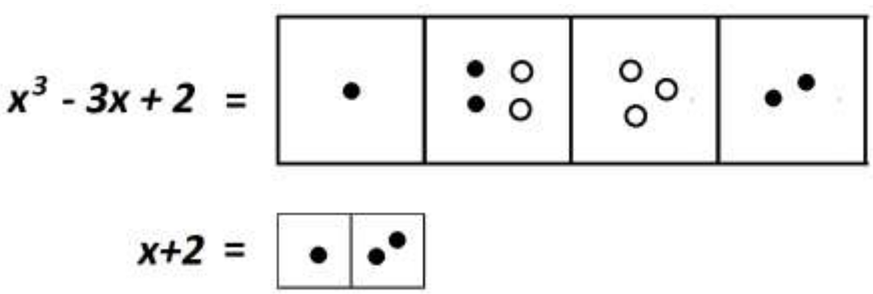
下面是它的图：



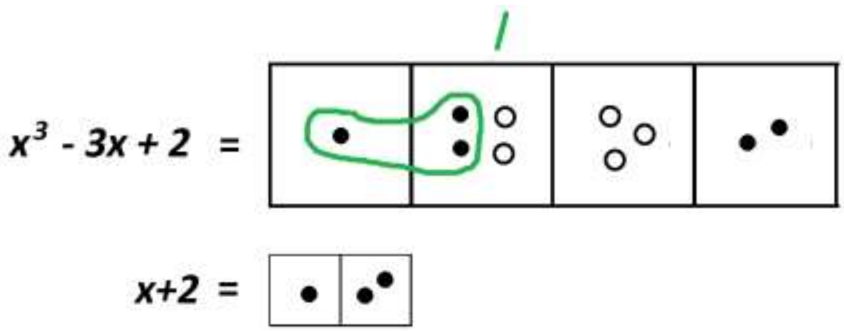
我们想找到一共有多少组 $x+2$，也就是在 x^3-3x+2 里面有多少组“一个点紧挨着两个点”，可是一个都没有。 我们也不能收敛某些点，因为我们没有 x 的值（这样我们根本不知道把一个点应该收敛成几个点。）这个问题真的看上去无解了。

但是我有个建议给你，无论何时都试用的建议：如果你在生活里想要一些东西，尽全力去得到它，当然还有它带来的后果。
所以现在我们想要什么？

看看 x^3-3x+2 图里最左边的那个点，如果它右边有两个点多好，这样正好就是一个 $x+2$。
那我们就放两个点进去，我们想要它们，画进去就有了。但是后果是：这里本来是空的，所以为了不改变这个事实，我们还得放两个空心的点进去，这样它们就互相抵消了。

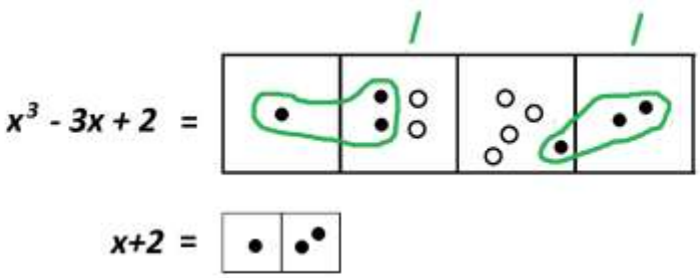


非常好！现在我们就找到第一组 $x+2$。



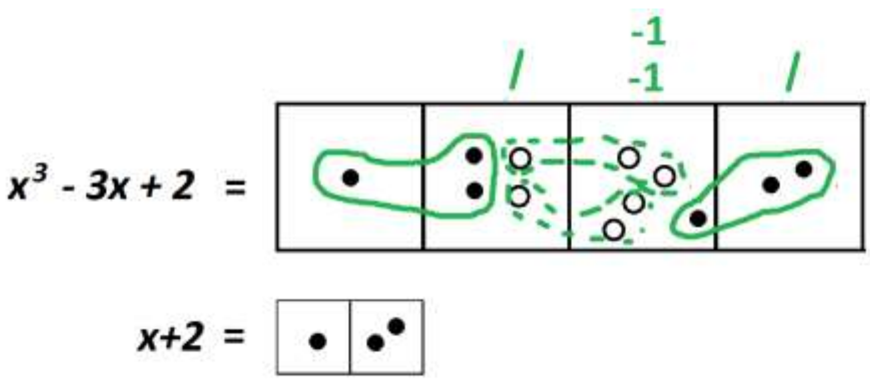
下一步你想要什么？你能在什么地方再找到一组 $x+2$ 吗？

注意到最右边有两个点，如果左边有一个点的话，我们就能再找到一组 $x+2$ 了，那我们就再画一个点，然后放一个空心的点，这样我们就又找到了一组 $x+2$。



看起来不错，不过我们好像又卡住了，是不是这个办法也不可行？

好好看看这幅图，你注意到什么吗？我们其实能找到另外两组 $x+2$，只不过这些点都是空心的。



好啦，不过我们怎么写下这个答案呢？

$\left(x^3-3x+2\right)\div\left(x+2\right)$ is x^2-2x+1.

棒极了！

所以其实我之前讲的方法还是可行的，我们其实可以用这个点和框的办法解决所有的多项式除法，包括那些有负数的多项式。
如果你想多练习几个问题，试试下面的这几个。先在纸上试试这几道题，然后你可以用网上的应用来解决它们。答案可以在本章的最后找到。

4. 计算 $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$.

5. 计算 $\dfrac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}$.

6. 如果你能解决这个问题 $\dfrac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}$, 你可以解决任何问题。

7. 这个问题最好玩： $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}$.

你觉得有没有一个简单的方法在纸上使用点和框这个方法？如果不画这些点和框，我们可以只是用数字和表格吗？（我们把这个叫做合成，可以在已有的方法基础上省略掉一两个中间步骤）

余数

It is just as easy to identify remainders in base x division problems as it is in base 10 arithmetic.
当基数是 10 的时候，很容易找到除法里的余数。

试试在$1 \leftarrow x$机制下面做这个除法：

$$\frac{4x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{x^2 - x + 1}$$

你能得到商是 $4x^2 - 3x + 3$ ，余数为 $2x - 3$ 吗？

这个除法运算可以表示为:

$$\frac{4x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{x^2 - x + 1} = 4x^2 - 3x + 2 + \frac{2x - 3}{x^2 - x + 1}.$$

Here are some practice problems if you would like to play some more with this idea.
如果你想多了解一些相关的内容，试试看下面的几个问题。

8. 你可以不做任何计算，猜出$\left(2x^2 + 7x + 7\right) \div \left(x + 2\right)$的结果吗？

9. 计算 $\frac{x^4}{x^2 - 3}$.

10. 试试这个问题： $\frac{5x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 7}{x^3 - 4x + 1}$.

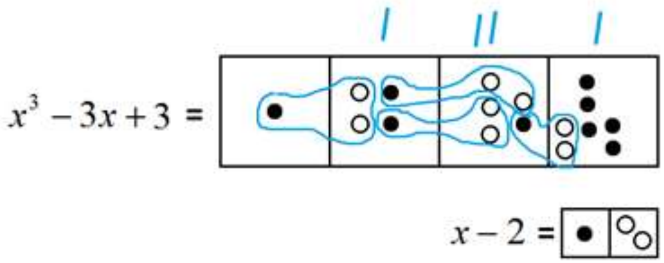
如果你用笔和纸来做这道题，你会很快意识到你一共需要画 84 个点，如果只写下 84 这个数字呢？或者干脆不画点，全部用数字可不可行？

余数定理

高中老师们经常问我点和框的这个方法能不能用来解释“余数定理”。如果你对这个问题有兴趣，那这一部分的内容就是为你准备的。
警告：不是每个人都适合读这一部分内容！

我们一起来看 $\frac{x^3-3x+3}{x-2}$. 也就是 $p(x)=x^3-3x+3$ 被一个线性多项式 $x-2$ 除.

下图是用 $1 \leftarrow x$ 机制来表示的这个问题。注意我们需要同时用一些实心和空心的点。



我们可以得到 $\frac{x^3-3x+3}{x-2}=x^2+2x+1+\frac{5}{x-2}$ 。余数是 5。

让我们再好好研究下 x^3-3x+3 的图，尤其注意那些圈在一起的点。

我们看到在 x^2 位上有一个圈，在 x 位上有两个圈，在个位数上有一个圈，还有一个余数 5 。 每一个圈都代表一个 $x-2$， 也就是说

$$p(x)=x^3-3x+3=(x-2)\times x^2+2(x-2)\times x+(x-2)\times 1+5.$$

(在 x^2 位上有一个 $x-2$, 在 x 位上有两个 $x-2$，在个位上有一个 $x-2$，还有一个余数 5.)

也就是说 $p(x)$ 是由一些 $(x-2)$s 再加上一个 5 组成的。

$$p(x)= \text{ multiples of } (x-2) \quad +5.$$

这个“+5 ”看起来不那么美，如果我们让 $x=2$ ，这样我们就得到

$$P(2)= \text{ multiples of } 0 \quad +5 = 0+5 = 5.$$

一般来说，当一个多项式 $p(x)$ 被另一个线性多项式 $x-h$ 除的时候，我们总会得到

$$p(x) = \text{ multiples of } (x-h) \ +r$$

这里的 r 就是余数。取 $x=h$ 我们就得到 $p(h)=r$.

这个就是多项式的余数定理。

> *Dividing a polynomial* $p(x)$ *by a term* $x-h$ *gives a remainder that is a single number equal to* $p(h)$*, the value of the polynomial at* $x=h$*.*

People like this theorem because it shows that if $p(h)=0$ for some number h, then $p(x)$ is an multiple of $x-h$. (The remainder is zero.) This gives the Factor Theorem for polynomials.

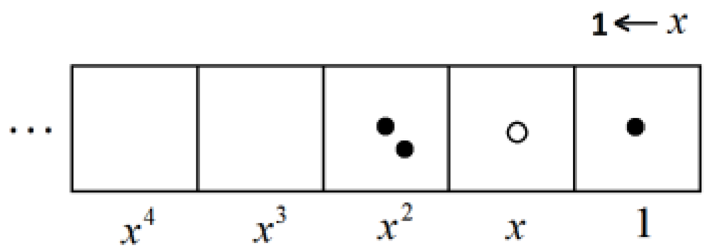
> *A polynomial* p *has a factor* $x-h$ *precisely when* h *is a zero of the polynomial, that is, precisely when* $p(h)=0$*.*

This is a big deal for people interested in factoring.

MULTIPLYING POLYNOMIALS

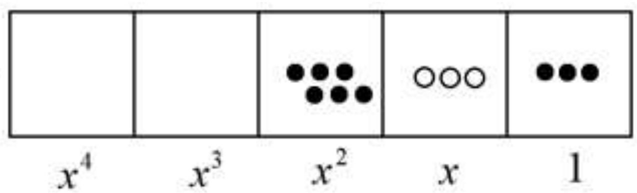
Can we multiply polynomials? You bet!

Here's the polynomial $2x^2 - x + 1$.



If we want to multiply this polynomial by 3 we just have to replace each dot and each antidot with three copies of it. (We want to triple all the quantities we see.)

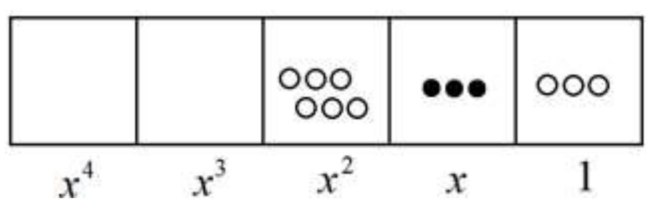
$3(2x^2 - x + 1) =$



We literally see that $3(2x^2 - x + 1)$ is $6x^2 - 3x + 3$.

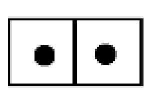
Suppose we wish to multiply $2x^2 - x + 1$ by -3 instead. This means we want the anti-version of tripling all the quantities we see. So each dot in the picture of $2x^2 - x + 1$ is to be replaced with three antidots and each antidot with three dots.

$-3(2x^2 - x + 1) =$



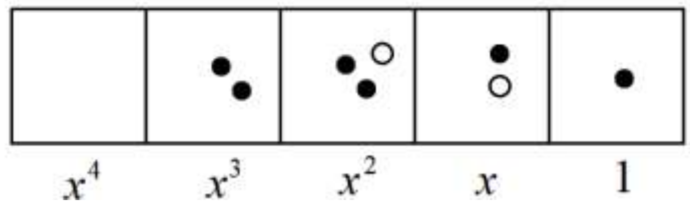
We have $-3(2x^2 - x + 1) = -6x^2 + 3 - 3$. We could also say that $-3(2x^2 - x + 1)$ is the anti-version of $3(2x^2 - x + 1)$.

Now suppose we wish to multiply $2x^2 - x + 1$ by $x + 1$. Since $x + 1$ looks like this



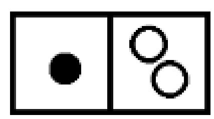
we need to replace each dot in the picture of $2x^2 - x + 1$ with one-dot-and-one-dot, and each antidot with the anti-version of this, which is one-antidot-and-one-antidot. (This is now getting fun!)

$(x+1)\times(2x^2 - x + 1) =$



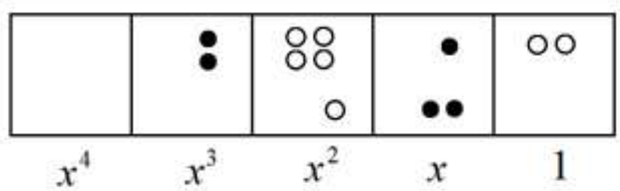
After some annihilations we see that $(x+1)\times(2x^2 - x + 1)$ equals $2x^3 + x^2 + 1$.

Now let's multiply $2x^2 - x + 1$ with $x - 2$, which looks like this.



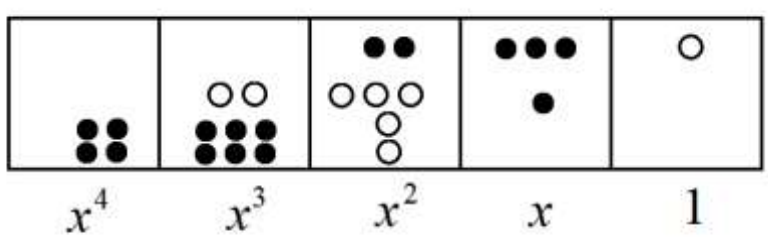
Each dot is to be replaced by one-dot-and-two-antidots, and each antidot with the opposite of this.

$(x-2)(2x^2 - x + 1) =$



We see $(x-2)(2x^2 - x + 1) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Okay, you're turn. Try $2x^2 - x + 1$ times $2x^2 + 3x - 1$. Do you get this picture? Do you see the answer $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$?



ADDING AND SUBRACTING POLYNOMIALS

Adding and subtracting in base x is just like adding and subtracting in base 10. And it is easier in fact! Since we don't know the value of x we will never explode dots. That is, we never need to perform "carries" as one does in base 10 arithmetic!

$$\begin{array}{rr} & 2x^2 + 8x - 5 \\ + & 9x^2 + 7x + 6 \\ \hline = & 11x^2 + 15x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 10x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \\ - & 3x^3 + 8x^2 + 5x - 2 \\ \hline = & 7x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \end{array}$$

We can draw dots and boxes pictures of these in an $1 \leftarrow x$ machine if we like.

WILD EXPLORATIONS

Here are some “big question” investigations you might want to explore, or just think about. Have fun!

EXPLORATION 1: CAN WE EXPLAIN AN ARITHMETIC TRICK?

Here’s an unusual way to divide by nine.

To compute $21203 \div 9$, say, read “21203” from left to right computing the partial sums of the digits along the way

$$\begin{array}{ll} 2 & =2 \\ 2+1 & =3 \\ 2+1+2 & =5 \\ 2+1+2+0 & =5 \\ 2+1+2+0+3 & =8 \end{array}$$

and then read off the answer

$$21203 \div 9 = 2355\ R\ 8.$$

In the same way,

$$1033 \div 9 = 1 |\ 1+0\ | 1+0+3 |\quad R\quad 1+0+3+3\quad = 114\ R\ 7$$

and

$$2222 \div 9 = 246\ R\ 8.$$

Can you explain why this trick works?

Here’s the approach I might take: For the first example, draw a picture of 21203 in a $1 \leftarrow 10$, but think of nine as $10-1$. That is, look for copies of $\boxed{\bullet \mid \circ}$ in the picture.

EXPLORATION 2: CAN WE EXPLORE NUMBER THEORY?

Use an $1 \leftarrow x$ machine to compute each of the following

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ c) $\dfrac{x^6-1}{x-1}$ d) $\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$

Can you now see that $\dfrac{x^{\text{number}}-1}{x-1}$ will always have a nice answer without a remainder?

Another way of saying this is that

$$x^{\text{number}}-1=(x-1)\times(\text{something}).$$

For example, you might have seen from part c) that $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$. This means we can say, for example, that 17^6-1 is sure to be a multiple of 16! How? Just choose $x=17$ in this formula to get

$$17^6-1=(17-1)\times(\text{something})=16\times(\text{something}).$$

e) Explain why $999^{100}-1$ must be a multiple of 998.

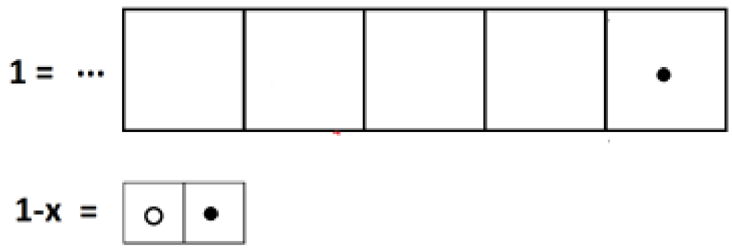
f) Can you explain why $2^{100}-1$ must be a multiple of 3, and a multiple of 15, and a multiple of 31 and a multiple of 1023? (Hint: $2^{100}=\left(2^2\right)^{50}=4^{50}$, and so on.)

g) Is $x^{\text{number}}-1$ always a multiple of $x+1$? Sometimes, at least?

h) The number $2^{100}+1$ is not prime. It is a multiple of 17. Can you see how to prove this?

EXPLORATION 3: AN INFINITE ANSWER?

Here is a picture of the very simple polynomial 1 and the polynomial $1-x$.



Can you compute $\frac{1}{1-x}$? Can you interpret the answer?

(We'll explore this example in the next chapter.)

SOLUTIONS

As promised, here are my solutions to the question posed.

Here are my answers.

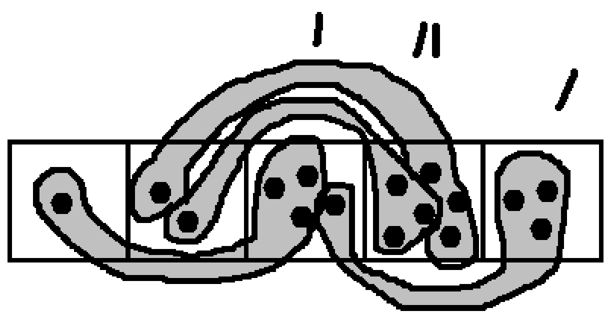
1.

a) $\left(2x^4+3x^3+5x^2+4x+1\right)\div\left(2x+1\right)=x^3+x^2+2x+1$

b) $\left(x^4+3x^3+6x^2+5x+3\right)\div\left(x^2+x+1\right)=x^2+2x+3$

And if x happens to be 10, we've just computed $23541\div 21=1121$ and $13653\div 111=123$.

2. We can do it. The answer is x^2+2x+1.



3.

a) For $x=10$ it says $14641\div 11=1331$

b) For $x=2$ it says $81\div 3=27$

c) For $x=3$ it says $256\div 4=64$
For $x=4$ it says $625\div 5=125$
For $x=5$ it says $1296\div 6=216$
For $x=6$ it says $2401\div 7=343$
For $x=7$ it says $4096\div 8=512$
For $x=8$ it says $6561\div 9=729$
For $x=9$ it says $10000\div 10=1000$
For $x=11$ it says $20736\div 12=1728$

d) For $x=0$ it says $1\div 1=1$.

e) For $x=-1$ it says $0\div 0=0$. Hmm! That's fishy! (Can you have a 1←0 machine?)

4. $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}=x^2-x+1$.

5. $\dfrac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}=2x^2-4x+1$.

6. $\dfrac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}=4x^3+2x^2+5x-1$.

7. $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}=x^8+x^6+x^4+x^2+1$.

8. We know that $\left(2x^2+7x+6\right)\div\left(x+2\right)=2x+3$ so I bet $\left(2x^2+7x+7\right)\div\left(x+2\right)$ turns out to be $2x+3+\dfrac{1}{x+2}$. Does it?

9. $\dfrac{x^4}{x^2-3}=x^2+3+\dfrac{9}{x^2-3}$.

10. $5x^2-2x+21+\dfrac{-14x^2+82x-14}{x^3-4x+1}$.