ТАЧКЕ КОЈЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ
ПОГЛАВЉЕ 6

СВЕ ОСНОВЕ, ОДЈЕДНОМ

Прва поглавља ове приче провела су нас кроз већи део основношколске математике. Хајде да сада пређемо на напредну средњошколску алгебру. Вау!

Али, знате шта, ту нема много посла. Већ смо урадили све што је требало.

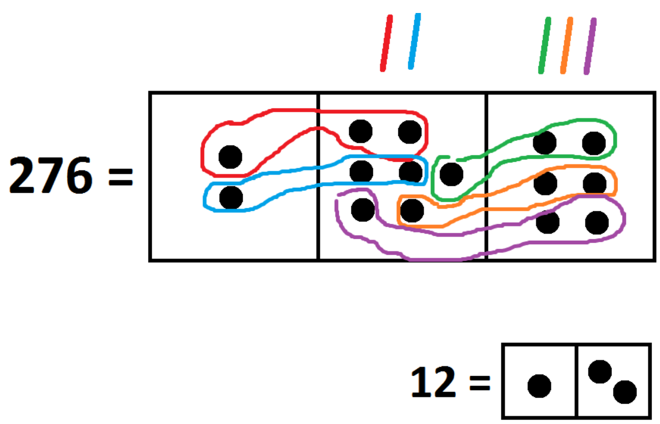
Једино што треба да схватимо је да нема ничег посебног у вези са машином $1 \leftarrow 10$. Да смо хтели, могли смо целу основношколску аритметику да радимо у машини $1 \leftarrow 2$, или у машини $1 \leftarrow 5$, или чак у машини $1 \leftarrow 37$. Математику баш брига коју машину користимо. Само нас људска наклоност ка броју десет вуче ка машини $1 \leftarrow 10$.

Хајде да сада прођемо кроз већи део онога што смо већ урадили. Али, хајде да то сада урадимо у свим могућим машинама, и то одједном!

Звучи невероватно. Али, у ствари је изненађујуће лагано.

ДЕЉЕЊЕ У ПРОИЗВОЉНОЈ ОСНОВИ

Ево примера дељења $276 \div 12$ који смо раније решавали у машини $1 \leftarrow 10$. Видимо да је резултат 23. Посматрајте мало ову слику – ускоро ће нам се поново појавити.



Хајде да сада урадимо исти задатак у другој основи. Али, лукаво вам нећу рећи са којом машином радимо! То би могла поново да буде машина $1 \leftarrow 10$, само вам једноставно нећу рећи. Можда је то машина $1 \leftarrow 2$, или машина $1 \leftarrow 4$ или машина $1 \leftarrow 13$. Просто нећете знати зато што вам то нећу открити. Тако ми се хоће!

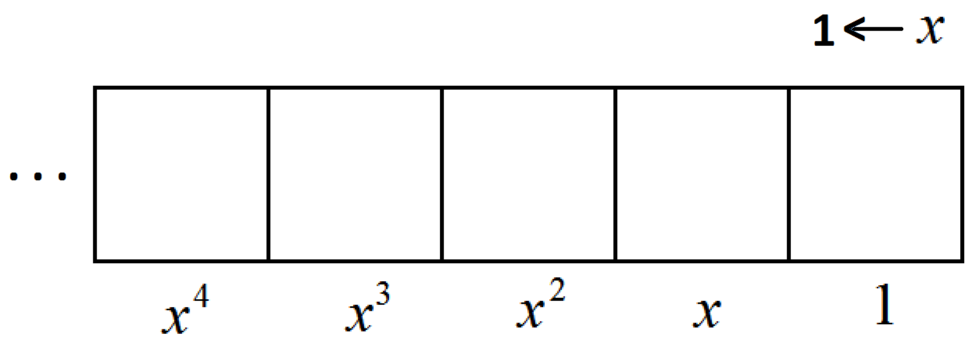
Е, сад, у средњошколској алгебри изгледа постоји омиљено слово абецеде којим се означава непозната величина. То је слово x.

Зато хајде да радимо са машином $1 \leftarrow x$ при чему слово x представља неки број чију вредност не знамо.

У машини $1 \leftarrow 10$ месне вредности кутија су степени броја десет: $1, 10, 100, 1000, \cdots$.

У машини $1 \leftarrow 2$ месне вредности кутија су степени броја два: $1, 2\ 4, 8, 16, \cdots$.
И тако даље.

Према томе, у машини $1 \leftarrow x$, месне вредности кутија биће степени броја x.



Ево провере, ако вам ипак кажем да сам замислио да је x заправо 10, онда ће степени 1, x, x^2, x^3, … одговарати бројевима: $1, 10, 100, 1000, \cdots$, што је исправно уколико је у питању машина $1 \leftarrow 10$. Уколико вам, уместо тога, кажем да сам замислио да је x број 2, онда ће степени 1, x, x^2, x^3, … одговарати бројевима: $1, 2\ 4, 8, 16, \cdots$, што је исправно уколико је у питању машина $1 \leftarrow 2$.

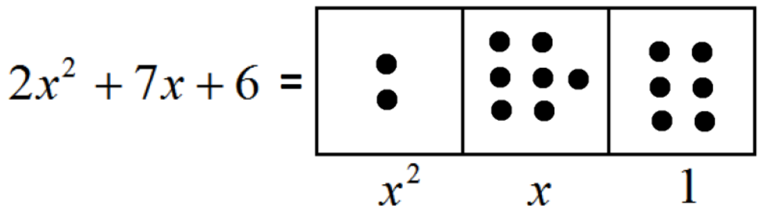
Ова машина $1 \leftarrow x$ заиста представља све машине истовремено!

ОК. С неба па у ребра! Ево једног напредног задатка из средњошколске алгебре.

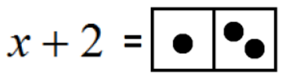
Израчунајте $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$.

Можете ли да разлучите шта ово значи у машини $1 \leftarrow x$? Пробајте да се мало играте пре него што наставите са читањем.

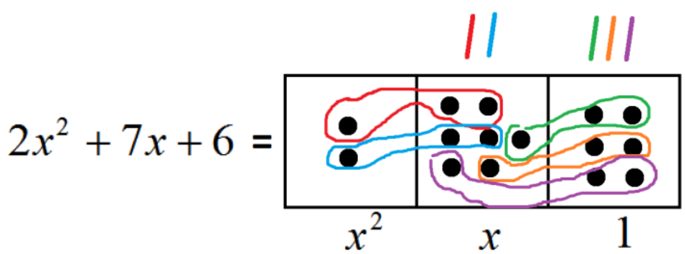
Ево како $2x^2 + 7x + 6$ изгледа у машини $1 \leftarrow x$. Има два x^2, седам x, и шест јединица.

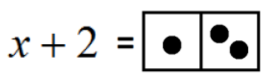


А ево како изгледа $x + 2$.



Задатак са дељењем $(x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ тражи од нас да утврдимо колико слика које представљају $x + 2$ има на слици која представља $2x^2 + 7x + 6$.





Видим две слике од $x + 2$ на нивоу који има вредност x и три на нивоу јединица. Резултат је $2x + 3$.

Посматрајте мало слику која приказује да је $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$. Да ли вам се чини познатом?

Управо смо решили задатак из средњошколске алгебре, као да је у питању задатак из основношколске аритметике!

О чему се овде ради?

Претпоставимо да сам вам рекао да сам замислио да је x баш 10. Онда је $2x^2 + 7x + 6$ уствари број $2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6$, а то је 276. А $x + 2$ је број $10 + 2$, односно 12. И тако смо уствари израчунали количник $276 \div 12$. Добили смо резултат $2x + 3$, што је $2 \cdot 10 + 3 = 23$, ако сам вам заиста рекао да је x баш 10.

Дакле, заиста смо само поновили задатак из основношколске артиметике!

> **Успутна примедба:** Узгред, ако вам кажем да је уместо тога x уместо 10 било једнако 2, онда је
>
> $2x^2 + 7x + 6 = 2 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 6$, што је 28,
> $x + 2 = 2 + 2$, што је 4,
>
> и
>
> $2x + 3 = 2 \cdot 2 + 3$, што је 7.
>
> Управо смо израчунали да је $28 \div 4 = 7$, а то је тачно!
>
> Дељење у машини $1 \leftarrow x$ је уствари истовремено решавање бесконачно много задатака са дељењем. Вау!

Покушајте да израчунате $(2x^3 + 5x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$ у машини $1 \leftarrow x$, како бисте добили резултат $2x^2 + x + 3$. (И ако вам кажем да сам замислио да x има вредност 10, да ли можете да видите да то одговара једнакости $2556 \div 12 = 213$?)

У средњој школи, бројеви изражени уз помоћ машине $1 \leftarrow x$ обично се називају *полиномима*. Они су попут бројева који су изражени у основи 10, једино што су сада ти „бројеви“ изражени у основи x. (И ако вам неко каже да x има вредност 10, онда су то заиста бројеви изражени у основи 10!)

Ако имате то у виду, велики део средњошколске алгебре постаје тако једноставан: то је понављање основношколске аритметике са основом 10.

Ево неколико задатака за вежбу које можете да покушате да урадите, уколико будете хтели. Моји одговори на њих могу се наћи на крају поглавља.

1. a) Израчунајте $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$.
b) Израчунајте $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1)$.

Ако вам саопштим да у оба задатка x заправо има вредност 10, које сте количнике управо израчунали у обичној аритметици?

2. Ево једног задатка са дељењем полинома који је записан у облику разломка. Можете ли да га урадите? (Треба ли пазити на неку зачкољицу овде?)

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^2 + 3}$$

3. Покажите да је $(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ једнако $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
a) Шта нам то говори, ако је $x = 10$?
b) Шта нам то говори, ако је $x = 2$?
c) Шта нам то говори, ако је x редом једнако $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ и 11?
d) Шта нам то говори, ако је $x = 0$?
e) Шта нам то говори, ако је $x = -1$?

ПРОБЛЕМ

У реду. Сада када се заиста осећамо добро док радимо задатке из више алгебре, морам нешто да вам признам. Мало сам вас обмањивао!

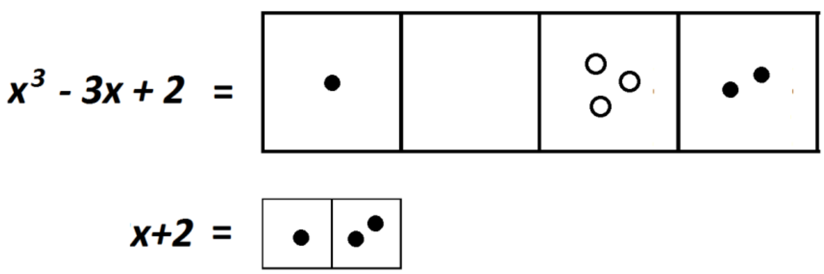
Бирао сам примере који су намештени да буду лепи и да се лако рачунају. Чињеница је да овај наш фабулозан метод обично не ради тако добро.

Погледајте, рецимо, следећи пример:

$$\frac{x^3-3x+2}{x+2}.$$

Видите ли шта сам избегавао све ово време? Тако је. Негативне бројеве.

Ево шта ја видим у машини $1 \leftarrow x$.



Тражимо једну тачку поред две тачке на слици којом је приказано x^3-3x+2. Ја не видим ниједну

Па шта сад да радимо, осим да узмемо и да плачемо? Имате ли неку идеју?

Примамљиво делује да кажемо да би требало да одексплодирамо неке тачке. То је генијална идеја! Једино што … не знамо колико је x па зато не знамо колико тачака треба да нацртамо када одексплодирамо неку од тачака. Који смор!

Треба само да нам сине нека оштроумна идеја па да учинимо нешто мудро. А можда се проблеми у којима се појављују полиноми са негативним бројевима једноставно не могу решавати уз помоћ тачака и кутија.

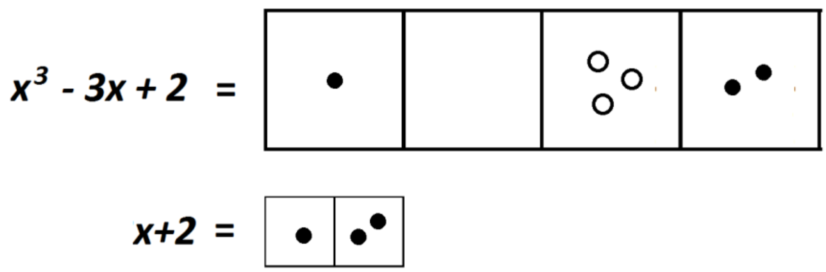
Шта мислите? Да ли вам је синула нека добра идеја?

РЕШЕЊЕ

Ево задатка са дељењем код кога смо се заглавили.

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

И ево поново слике која га приказује у машини $1 \leftarrow 10$.



Тражимо слику полинома $x + 2$, дакле једну тачку поред две тачке, било где на слици полинома $x^2 - 3x + 2$. Не видимо ниједну.

А не можемо да одексплодирамо тачке да нам помогну, пошто не знамо колико је x. (Не знамо колико тачака да нацртамо када одексплодирамо једну тачку.)

У овом тренутку чини се да се налазимо у безизлазној ситуацији.

Али, имам за вас један савет, штавише једну обичну животну лекцију. Она гласи овако:

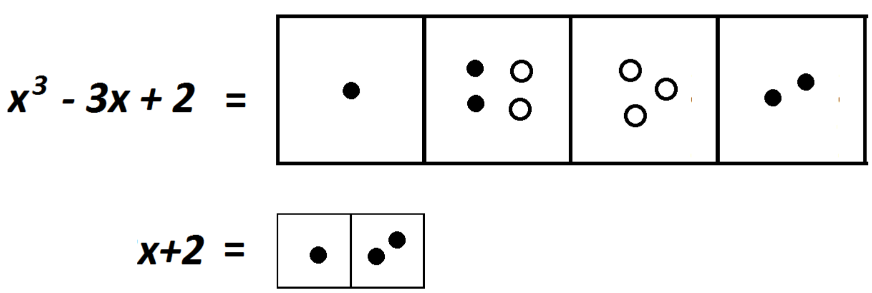
АКО ПОСТОЈИ НЕШТО ШТО ЖЕЛИТЕ У ЖИВОТУ, УЧИНИТЕ ТО!
(И суочите се са последицама.)

Да ли у овом тренутку постоји нешто што желимо у животу?

Погледајте ту усамљену тачку у крајњој левој кутији. Зар не би било лепо да у кутији поред ње постоје две тачке и да све заједно чине један примерак полинома $x + 2$?

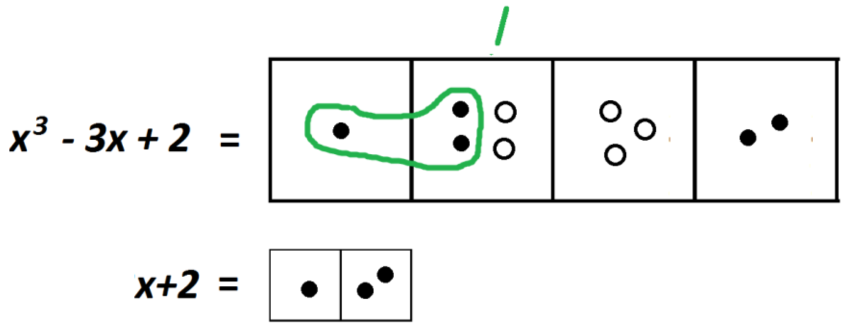
Па хајде да једноставно доцртамо две тачке у тој празној кутији! То је оно што желим, па хајде да то и учинимо!

Али биће и последица: та кутија треба да буде празна. И да би остала празна, можемо у њу да ставимо и две антитачке!



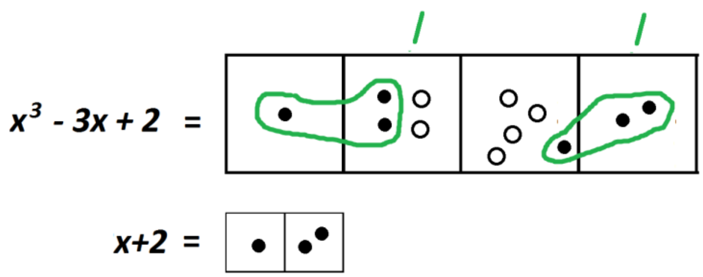
Генијално!

Тако смо добили један примерак онога за чиме трагамо.



Да ли желимо још нешто у животу овога часа? Можете ли да нацртате још један полином $x + 2$ негде на овој слици?

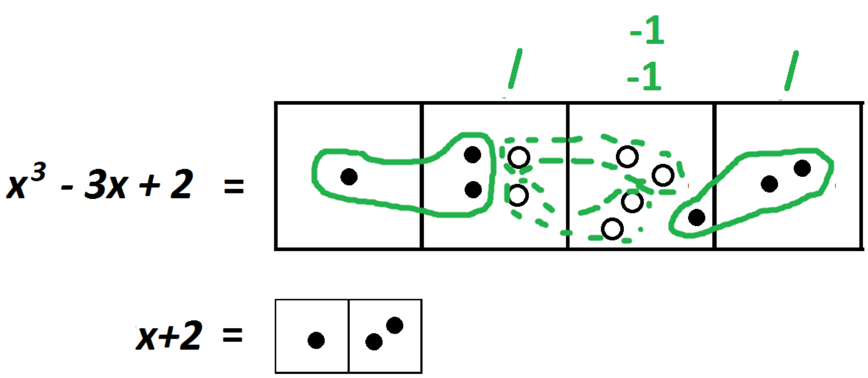
Лично бих волео да са леве стране пара тачака које се налазе у крајњој десној кутији стоји једна тачка. Учинићу то! Додаћу још један пар који чине тачка и антитачка. На тај начин добићу још једну слику полинома $x + 2$.



Све је ово добро и ваљано, али, да ли смо се сада заглавили? Можда ова генијална идеја на крају заправо и није од помоћи.

Посматрајте мало ову слику. Да ли нешто примећујете?

Ако пажљиво погледате, уочићете сасвим супротно од онога што тражимо! Уместо једне тачке поред две тачке, видимо једну антитачку поред две антитачке.



Вау!

А како читамо одговор? Видимо да је $(x^3 - 3x + 2) \div (x + 2) = x^2 - 2x + 1$.

Феноменално!

Изгледа да сам слагао када сам рекао да сам варао. Заиста можемо да решавамо задатке са дељењем полинома користећи тачке и кутије, чак и са негативним бројевима!

Ако тражите неке задатке за вежбање, слободно покушајте да урадите ове који следе. Покушајте прво уз помоћ оловке и папира, а затим можда и уз помоћ апликације. Као и обично, резултати су на крају овог поглавља.

4. Израчунајте $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$.

5. Покушајте да израчунате $\frac{x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}$.

6. Ако можете да урадите овај задатак: $\frac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}$, онда вероватно можете да урадите било који задатак!

7. Овај задатак је лудачки забаван: $\frac{x^{10}-1}{x^2-1}$.

Успутна примедба: Да ли постоји начин да се приступ помоћу тачака и кутија са лакоћом спроведе на папиру? Уместо да цртамо тачке и кутије, да ли бисмо могли да радимо са табелама бројева уз помоћ којих бисмо контролисали коефицијенте? (Реч *синтетички* често се употребљава да означи алгоритме у којима је, у односу на одговарајући ручни поступак, прескочен корак или два.)

ОСТАЦИ

Једнако је лако утврдити остатак при дељењу у основи x, као што је лако учинити то у аритметици која ради са основом 10.

Играјте се са

$$\frac{4x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{x^2 - x + 1}$$

у машини $1 \leftarrow x$. Можете ли да видите да је резултат $4x^2 - 3x + 2$ уз остатак $2x - 3$ који још треба поделити са $x^2 - x + 1$?

Резултат се обично записује на следећи начин:

$$\frac{4x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{x^2 - x + 1} = 4x^2 - 3x + 2 + \frac{2x - 3}{x^2 - x + 1}$$

Ево неколико задатака за вежбу, уколико пожелите да се мало играте овом идејом.

8. Можете ли да закључите шта ће бити резултат дељења $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ пре него што поделите ове полиноме?

9. Израчунајте

$$\frac{x^4}{x^2 - 3}$$

10. Пробајте ово лудило:

$$\frac{5x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 7}{x^3 - 4x + 1}$$

Уколико ово будете израчунавали помоћу оловке и папира, ухватићете сами себе како у неком тренутку покушавате да нацртате 84 тачке. Да ли је брже и једноставније само написати број „84“? Штавише, како вам се чини идеја да једноставно само пишете бројеве и да се уопште не гњавите цртајући тачке?

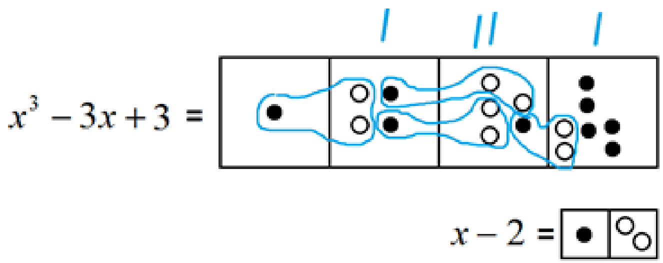
НЕОБАВЕЗНО: ТЕОРЕМА О ОСТАЦИМА

Средњошколски наставници питали су ме да ли је могуће објаснити „теорему о остацима“ уз помоћ тачака и кутија. Овај необавезни одељак намењен је свима који су заинтересовани да сазнају нешто о овом делу посебно напредне алгебре полинома.

УПОЗОРЕЊЕ: Део који следи није намењен онима који имају слабо срце!

Хајде да проучимо разломак $\frac{x^3-3x+3}{x-2}$. Он представља количник полинома $p(x) = x^3 - 3x + 3$ и простог (линеарног) полинома $x - 2$.

Ево шта добијам уз помоћ машине $1 \leftarrow 10$. (Морао сам да додам неколико парова које чине тачка и антитачка.) Погледајте!



Видимо да је $\frac{x^3-3x+3}{x-2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x-2}$. При дељењу се добија остатак 5.

Али, хајде да пажљивије погледамо слику полинома $x^3 - 3x + 3$, обраћајући пажњу на тачке које су груписане заокруживањаем.

Видимо једну групу на нивоу који има тежину x^2, две на нивоу тежине x, и једну на нивоу јединица. И још видимо остатак који чини 5 тачака. Пошто свака група представља полином $x - 2$, ово значи да важи:

$$p(x) = x^3 - 3x + 3 = (x-2) \cdot x^2 + 2(x-2) \cdot x + (x-2) \cdot 1 + 5$$

(То је један $x - 2$ на нивоу који има тежину x^2, два на нивоу тежине x, један на нивоу јединица и још 5.)

То показује да је полином $p(x)$ комбинација неколико $(x - 2)$ и једног додатног броја 5.

$$p(x) = sadržatelji\ (x-2) + 5$$

Тих „$+5$“ на крају боде очи. Ако узмете да је $x = 2$ биће

$$p(2) = sadržatelji\ 0 + 5 = 0 + 5 = 5$$

У општем случају, дељењем полинома $p(x)$ делиоцем облика $x - h$ добиће се:

$$p(x) = sadržatelji\ (x-h) + r\ ,$$

при чему је r остатак. Ако се узме да је $x = h$ добиће се $p(h) = r$.

То је Теорема о остацима за полиноме.

> *Дељењем полинома $p(x)$ полиномом $x - h$ као остатак се добија само број који је једнак $p(h)$, вредности полинома у тачки $x = h$.*

Људима се ова теорема свиђа зато што тврди да, ако је $p(h) = 0$ за неки број h, онда је један од чинилаца полинома $p(x)$ полином $x - h$. (Остатак је нула.) Одатле следи Теорема о растављању на чиниоце за полиноме.

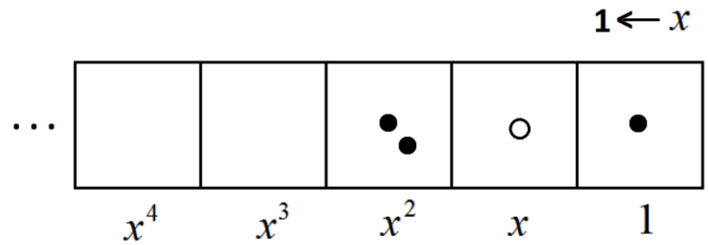
> *Полином p има чинилац $x - h$ тачно онда када је h нула тог полинома, тј, тачно онда када је $p(h) = 0$.*

Ово је важно онима који су заинтересовани за растављање на чиниоце.

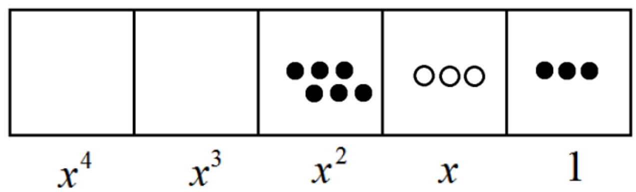
МНОЖЕЊЕ ПОЛИНОМА

Можемо ли да множимо полиноме? Него шта!

Ево полинома $2x^2 - x + 1$.

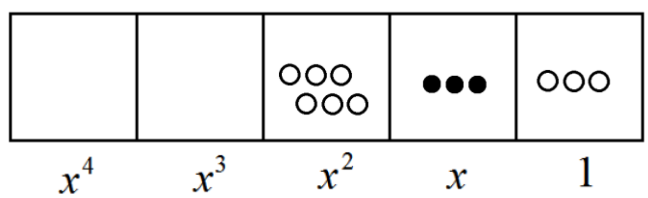


Ако желимо да помножимо тај полином са 3 треба само да заменимо сваку тачку и антитачку са три иста примерка. (Хоћемо да утростручимо све што видимо.)

$3(2x^2 - x + 1) =$ 

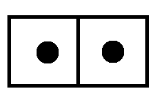
Буквално можемо да видимо резултат $6x^2 - 3x + 3$.

Претпоставимо да уместо тога желимо да помножимо $2x^2 - x + 1$ са -3. То значи да хоћемо да добијемо анти-верзију утростручавања свега што видимо. Зато свака тачка у приказу $2x^2 - x + 1$ треба да се замени са три антитачке, а свака антитачка са три тачке.

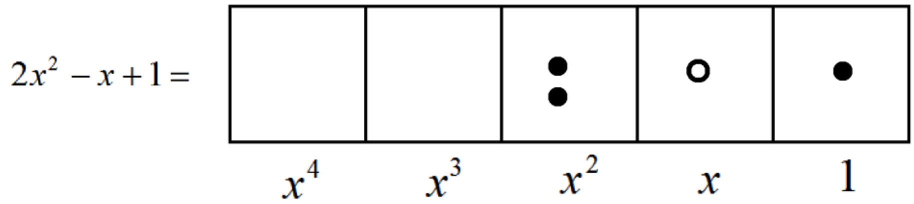
$-3(2x^2 - x + 1) =$ 

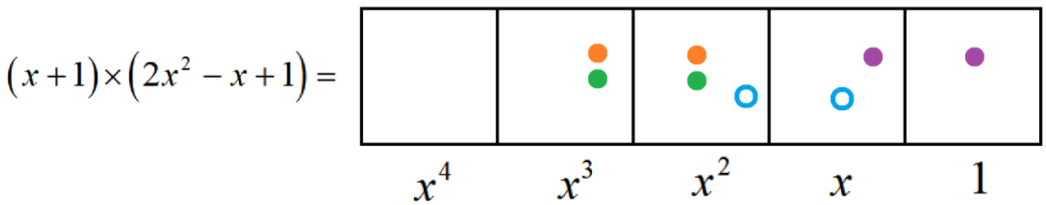
Добили смо да је $3(x^2 - x + 1) = -6x^2 + 3x - 3$. Могли смо да кажемо и да је $-3(x^2 - x + 1)$ анти-верзија полинома $3(x^2 - x + 1)$.

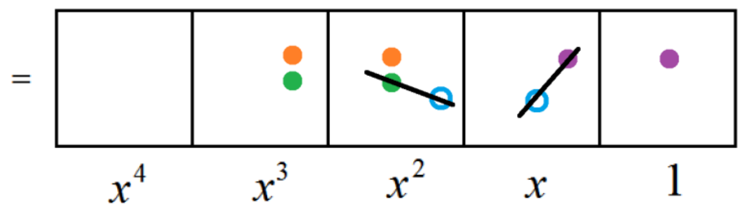
Претпоставимо сада да желимо да помножимо $2x^2 - x + 1$ са $x + 1$. Пошто $x + 1$ изгледа овако:

,

морамо да заменимо сваку тачку на слици полинома $2x^2 - x + 1$ једном тачком поред једне тачке, а сваку антитачку са супротном верзијом тога, што је једна антитачка поред једне антитачке. (Ово сада постаје забавно!)

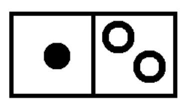




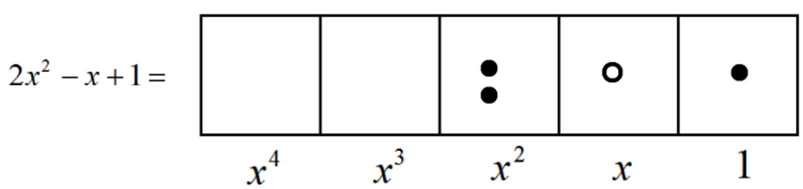


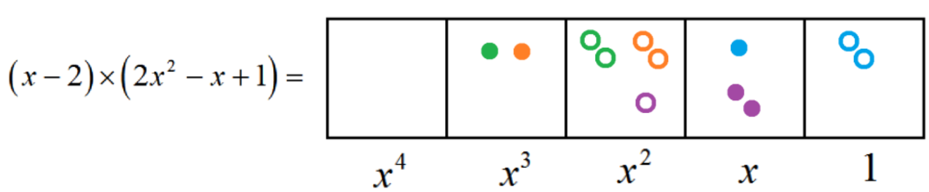
Након што потремо неке тачке и антитачке, видимо да је производ $(x+1)\cdot(2x^2-x+1)$ једнак $2x^3+x^s+1$.

Хајде да сада помножимо $2x^2-x+1$ полиномом $x-2$, који изгледа овако:



Свака ће тачка бити замењена са тачком поред две антитачке, а свака антитачка са супротним од тога.

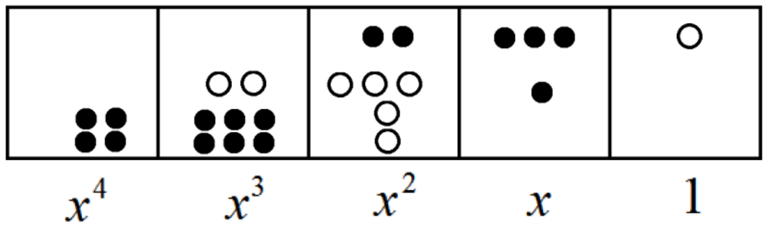




Видимо да је $(x-2)\cdot(2x^2-x+1) = 2x^3-5x^2+3x-2$.

ОК, сада је ред на вас. Покушајте да помножите $2x^2 - x + 1$ са $2x^2 + 3x - 1$. Да ли сте добили овакву слику? (Овог пута нисам користио боје!)

Видите ли да је резултат $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$?



САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ ПОЛИНОМА

Сабирање и одузимање у основи x потпуно је исто као сабирање и одузимање у основи 10. Штавише, лакше је! Пошто не знамо праву вредност броја x никада нећемо пустити тачке да експлодирају. Односно, никад нећемо морати да „преносимо“ као што то обично радимо при рачунању у основи 10!

$$\begin{array}{rr} & 2x^2 + 8x - 5 \\ + & 9x^2 + 7x + 6 \\ \hline = & 11x^2 + 15x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 10x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \\ - & 3x^3 + 8x^2 + 5x - 2 \\ \hline = & 7x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \end{array}$$

Можемо да нацртамо слике ових задатака помоћу тачака и кутија у једној машини $1 \leftarrow x$ ако нам се дâ.

ФАНТАСТИЧНА ИСТРАЖИВАЊА

Ево неких истраживања која се односе на „важна питања“ на која ћете можда покушати да одговорите или макар да размислите о њима. Уживајте!

ИСТРАЖИВАЊЕ: 1: МОЖЕМО ЛИ ДА ОБЈАСНИМО ЈЕДАН АРИТМЕТИЧКИ ТРИК?

Ево једног необичног начина да се дели са девет.

Рецимо, да бисте израчунали колико је $21203 \div 9$, „читајте“ број 21203 с лева на десно, рачунајући успут парцијалне збирове његових цифара:

$$\begin{array}{ll} 2 & =2 \\ 2+1 & =3 \\ 2+1+2 & =5 \\ 2+1+2+0 & =5 \\ 2+1+2+0+3 & =8 \end{array}$$

и још их саберите да бисте добили резултат:

$$\mathbf{21203 \div 9 = 2355}, \text{уз остатак } \mathbf{8}.$$

На исти начин је

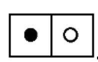
$1033 \div 9 = 1|1+0|1+0+3,$ уз остатак $1+0+3+3 = 114,$ уз остатак 7

и

$2222 \div 9 = 246,$ уз остатак $8.$

Можете ли да објасните зашто овај трик ради?

Ево шта би могао да буде мој приступ: За први пример, нацртајте слику броја 21203 у машини $1 \leftarrow 10$, али посматрајте деветку као $10-1$. Другим речима, тражите на вашој слици ову слику:

.

ИСТРАЖИВАЊЕ 2: МОЖЕМО ЛИ ДА ИСТРАЖУЈЕМО ТЕОРИЈУ БРОЈЕВА?

Искористите машину $1 \leftarrow x$ како бисте израчунали следеће количнике:

a) $\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\frac{x^3-1}{x-1}$ c) $\frac{x^6-1}{x-1}$ d) $\frac{x^{10}-1}{x-1}$

Можете ли сада да разумете да ће количник $\frac{x^{neki\ broj}-1}{x-1}$ увек за резултат дати цео број без остатка?

Други начин да се то каже је да важи једнакост:

$$x^{neki\ broj} - 1 = (x-1) \cdot (neki\ polinom)$$

Можда сте приметили радећи трећи задатак да је $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. То значи да можемо, на пример, да кажемо да је 16 сигурно један од чинилаца броја $17^6 - 1$! Откуд то? Само у претходној једнакости ставите да је $x = 17$ и добићете да важи:

$$17^6 - 1 = (17-1) \cdot (neki\ polinom) = 16 \cdot (neki\ polinom)$$

a) Објасните зашто број $999^{100} - 1$ мора да има број 998 као један од чинилаца.

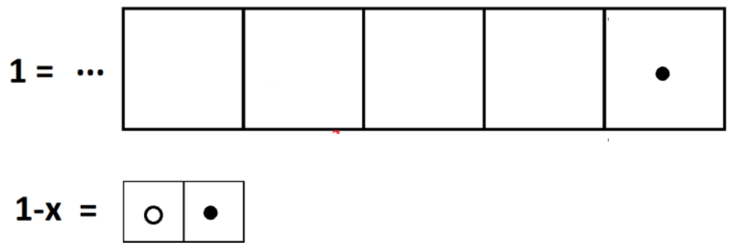
b) Можете ли да објасните зашто број $2^{100} - 1$ мора да има број 3 као један од својих чинилаца, као и бројеве 15, 31 и 1023? (Помоћ: $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}$, итд.)

c) Да ли број $x^{neki\ broj} - 1$ увек има $x + 1$ као један од чинилаца? Да ли му је то бар понекад један од чинилаца?

d) Број $2^{100} + 1$ није прост. Један од његових чинилаца је 17. Можете ли да нађете начин да ово докажете?

ИСТРАЖИВАЊЕ 3: БЕСКОНАЧАН РЕЗУЛТАТ?

На сликама су приказани веома једноставан полином 1 и полином $1 - x$.



Можете ли да израчунате колико је $\frac{1}{1-x}$? Можете ли да објасните резултат?

(Анализираћемо овај пример мало детаљније у следећем поглављу.)

РЕШЕЊА

Као што сам и обећао, следе моји одговори на постављена питања.

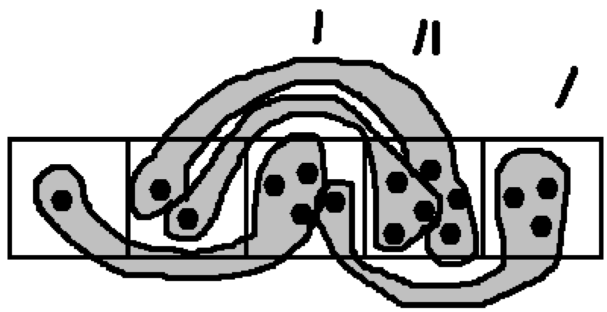
1.

a) $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

b) $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3$

И, ако је којим случајем x баш 10, управо смо израчунали да је $23541 \div 21 = 1121$ и да је $13653 \div 111 = 123$.

2. Можемо да га урадимо. Резултат је $x^2 + 2x + 1$.



3.

a) Ако је $x = 10$, то нам говори да је $4641 \div 11 = 1331$.

b) Ако је $x = 2$, то нам говори да је $81 \div 3 = 27$.

c) Ако је $x = 3$, то нам говори да је $256 \div 4 = 64$.
Ако је $x = 4$, то нам говори да је $625 \div 5 = 125$.
Ако је $x = 5$, то нам говори да је $1296 \div 6 = 216$.
Ако је $x = 6$, то нам говори да је $2401 \div 7 = 343$.
Ако је $x = 7$, то нам говори да је $4096 \div 8 = 512$.
Ако је $x = 8$, то нам говори да је $6561 \div 9 = 729$.
Ако је $x = 9$, то нам говори да је $10000 \div 10 = 1000$.
Ако је $x = 11$, то нам говори да је $20736 \div 12 = 1728$.

d) Ако је $x = 0$, то нам говори да је $1 \div 1 = 1$.

e) Ако је $x = -1$, то нам говори да је $0 \div 0 = 0$. Хмм! Ту нешто не штима! (Да ли постоји машина $1 \leftarrow 0$?)

4. $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1} = x^2 - x + 1$.

5. $\frac{x^3-14x^2+14x-3}{2x-3} = 2x^2 - 4x + 1$.

6. $\frac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1} = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1$.

7. $\frac{x^{10}-1}{x^2-1} = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

8. Знамо да је $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$, па се зато кладим да ће резултат дељења $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ бити $2x + 3 + \frac{1}{x+2}$. Да ли је?

9. $\frac{x^4}{x^2-3} = x^2 + 3 + \frac{9}{x^2-3}$.

10. $5x^2 - 2x + 21 + \frac{-14x^2+82x-14}{x^3-4x+1}$.