PUNTOS EXPLOSIVOS
CAPITULO 6

TODAS LAS BASES, TODAS A LA VEZ

En este capítulo de esta historia nos he llevado a lo largo de gran parte de las matemáticas de primaria. Procedamos ahora hacia el álgebra avanzada de la secundaria. ¡Woa!

Pero aquí está la cosa: no hay nada nuevo. Ya hicimos todo el trabajo que había que hacer.

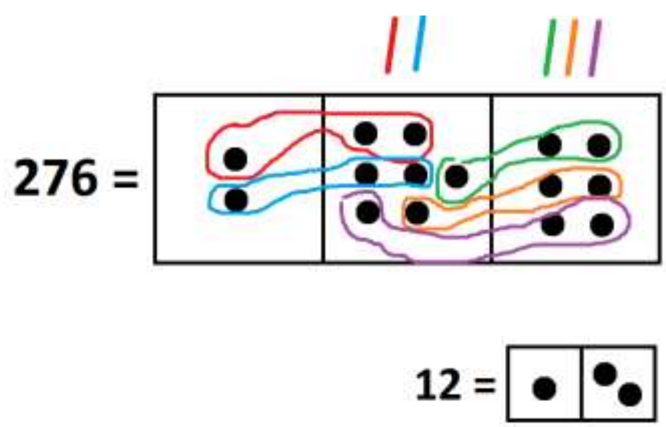
De lo único que tenemos que darnos cuenta es que la máquina $1 \leftarrow 10$ no tiene nada de especial. Podríamos hacer toda la aritmética de primaria en una máquina $1 \leftarrow 2$ si quisiéramos, o en una máquina $1 \leftarrow 5$, o hasta en una máquina $1 \leftarrow 37$. A las matemáticas no les importa en cuál máquina lo hacemos. Somos sólo nosotros los humanos con una predilección por el número diez que gravitamos hacia la máquina $1 \leftarrow 10$.

Repasemos gran parte de lo que hemos hecho. ¡Pero hagámoslo ahora con todas las máquinas posibles, todas a la vez!

Suena loco. Pero es sorpresivamente sencillo.

DIVISION EN CUALQUIER BASE

Aquí está un problema de división que hicimos antes $276 \div 12$ en una máquina $1 \leftarrow 10$. Vemos la respuesta 23. Mira este dibujo por un momento – pronto reaparecerá.



Hagamos ahora el mismo problema en otra base. ¡Pero la única parte complicada es que no les diré en cuál máquina estamos! Podríamos estar otra vez en una máquina $1 \leftarrow 10$, simplemente no lo diré.

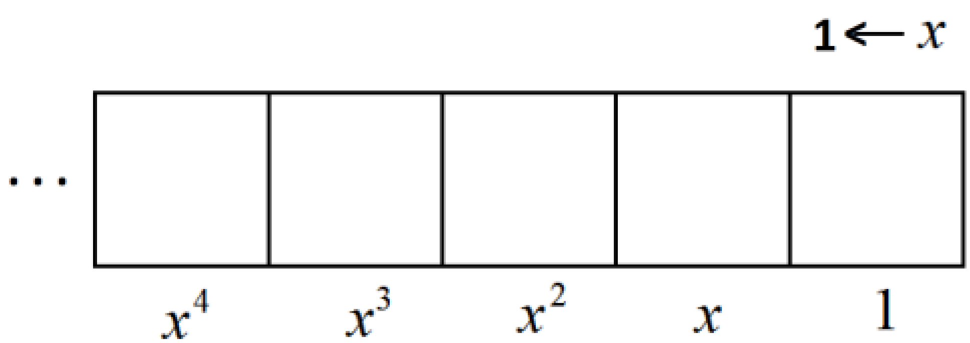
Quizás sea una máquina $1 \leftarrow 2$, o una máquina $1 \leftarrow 4$ o una máquina $1 \leftarrow 13$. Simplemente no lo sabrán porque no he de decirles. ¡Estoy de ese humor!

Ahora bien, en álgebra de secundaria parece haber una letra favorita del alfabeto que se usa para una cantidad cuyo valor desconocemos. Es la letra x.

Entonces trabajemos con una máquina $1 \leftarrow x$ con la letra x representando un número cuyo valor no sabemos.

En una máquina $1 \leftarrow 10$ los valores posicionales de las casillas son potencias de diez: 1, 10, 100, 1000, … .
En una máquina $1 \leftarrow 2$ los valores posicionales de las casillas son potencias de dos: 1, 2, 4, 8, 16, ….
Y así sucesivamente.

Por lo tanto, en una máquina $1 \leftarrow x$, los valores posicionales de las casillas son potencias de x.



Para verificar, si les dijera que x es efectivamente 10 en mi mente, entonces las potencias 1, x, x^2, x^3, … corresponden a los números 1, 10, 100, 1000, … , lo cual es correcto para una máquina $1 \leftarrow 10$.
Si en lugar de eso, les digo que x es realmente 2 en mi mente, entonces las potencias 1, x, x^2, x^3, … corresponden a los números 1, 2, 4, 8, 16, …, lo cual es correcto para una máquina $1 \leftarrow 2$.

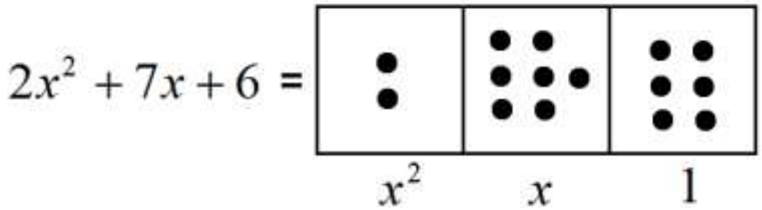
¡Esta máquina $1 \leftarrow x$ está realmente representando a todas las máquinas a la vez!

Bueno. ¡De la nada! He aquí un problema de álgebra avanzada de secundaria.

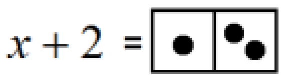
$\boxed{\text{Calculen } \left(2x^2 + 7x + 6\right) \div \left(x + 2\right).}$

¿Pueden descifrar lo que significa en una máquina $1 \leftarrow x$? Intenten jugar con esto antes de seguir leyendo.

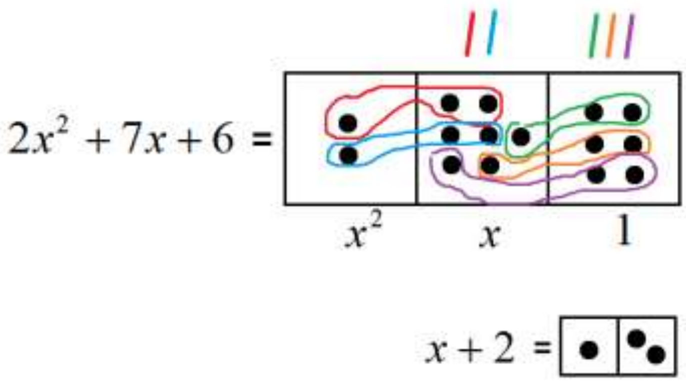
Aquí está $2x^2+7x+6$ visto en una máquina $1 \leftarrow x$. Son dos x^2, siete x, y seis unos.



Y aquí está como se ve $x+2$.



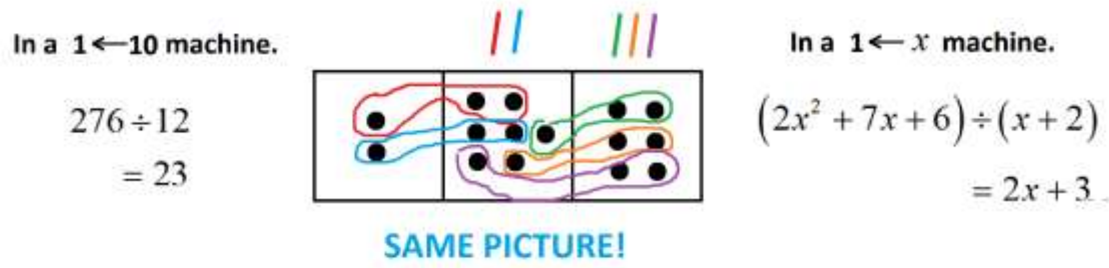
El problema de división $\left(2x^2+7x+6\right)\div\left(x+2\right)$ nos pide encontrar imágenes de $x+2$ en el dibujo de $2x^2+7x+6$.



Veo dos copias de $x+2$ a nivel de las x y tres copias a nivel de los 1. La respuesta es $2x+3$.

Miren este dibujo $\left(2x^2+7x+6\right)\div\left(x+2\right)=2x+3$. Les parece familiar?

¡Acabamos de resolver un problema de álgebra de secundaria como si fuera un problema de aritmética de primaria!



¿Qué está pasando aquí?

Supongan que les digo que x siempre fue un 10 en mi mente. Entonces $2x^2 + 7x + 6$ es el número $2 \times 100 + 7 \times 10 + 6$, lo cual es 276. Y $x + 2$ es el número $10 + 2$, que es, 12. Entonces hemos calculado $276 \div 12$. Si efectivamente ahora les digo que x es 10, obtuvimos la respuesta $2x + 3$, que es $2 \times 10 + 3 = 23$.

¡Entonces sí hemos repetido un problema de aritmética de primaria!

A parte: Por cierto, si les digo que, en vez, x era 2, entonces

$2x^2 + 7x + 6 = 2 \times 4 + 7 \times 2 + 6$, que es 28,
$x + 2 = 2 + 2$, que es 4,

y

$2x + 3 = 2 \times 2 + 3$, que es 7.

¡Acabamos de calcular $28 \div 4 = 7$, lo cual es correcto!

Hacer una división en una máquina $1 \leftarrow x$ es realmente hacer un número infinito de divisiones de un solo golpe. ¡Woa!

Prueben calcular $\left(2x^3 + 5x^2 + 5x + 6\right) \div \left(x + 2\right)$ en una máquina $1 \leftarrow x$ para obtener la respuesta $2x^2 + x + 3$. (¿Y si les digo que x es 10 en mi mente, pueden ver que coincide con $2556 \div 12 = 213$?)

En la escuela secundaria, los números expresados en una máquina $1 \leftarrow x$ son usualmente llamados *polinomios*. Son simplemente como los números en base 10, excepto que ahora son “números” expresados en base x. (¡Y si alguien les dice que x en realidad es 10, entonces son números de base 10!)

Tener esto en mente simplifica tanto mucha de el álgebra de la escuela secundaria entonces: es una repetición de la aritmética en base 10 de la escuela primaria.

He aquí algunos problemas de práctica para que prueben, si quieren. Mis respuestas a ellos aparecen al final del capítulo.

1. a) Calculen $\left(2x^4+3x^3+5x^2+4x+1\right)\div\left(2x+1\right)$.
b) Calculen $\left(x^4+3x^3+6x^2+5x+3\right)\div\left(x^2+x+1\right)$.

¿Si les digo que x es en realidad 10 en ambos problemas, cuáles dos problemas de división en aritmética ordinaria acaban de calcular?

2. He aquí un problema de división de polinomios escrita como fracciones. ¿Lo pueden resolver? (¿Hay que prestar atención a alguna pequeña complicación posible?)

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^2+3}$$

3. Demuestren que $\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)\div\left(x+1\right)$ equivale a x^3+3x^2+3x+1.

a) ¿Qué implica para $x=10$?
b) ¿Qué implica para $x=2$?
c) ¿Qué implica para x igual a cada uno de estos: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, and 11?
d) ¿Qué implica para $x=0$?
e) ¿Qué implica para $x=-1$?

UN PROBLEMA

Bueno. Ahora que estamos cómodos haciendo álgebra avanzada, tengo que hacer una confesión. ¡Les he estado engañando!

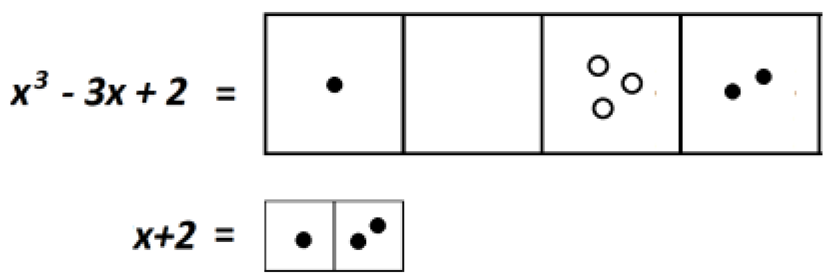
He estado escogiendo ejemplos diseñados para que todo sea sencillo y funcione maravillosamente. La verdad es que este método nuestro tan fabuloso no suele funcionar tan bien.

Consideren, por ejemplo,

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2} \, .$$

¿Ven lo que he estado evitando todo este tiempo? Sip. Números negativos.

Aquí está lo que veo en una máquina $1 \leftarrow x$.



Estamos buscando un punto adyacente a dos puntos en el dibujo de $x^3 - 3x + 2$. ¡Y no veo ninguno!

¿Entonces qué podemos hacer, además de llorar un poco? ¿Tienen alguna idea?

Es tentador decir que simplemente des-explotaremos algunos puntos. ¡Es una idea brillante! Excepto… no conocemos el valor de x y por tanto no sabemos cuántos puntos dibujar para des-explotar. ¡Qué molestia!

Necesitamos un prodigioso destello de ingenio para que se nos ocurra una mejor manera. O quizás los problemas con polinomios y números negativos simplemente no se pueden resolver con este método de puntos y casillas.

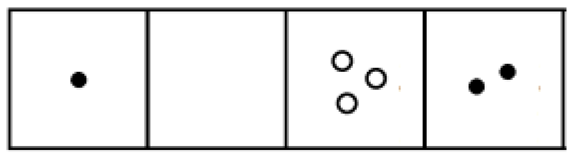
¿Ustedes qué piensan? ¿Algún destello de ingenio?

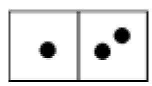
CONCLUSION

Aquí está el problema de división con el que estamos atascados.

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

Y aquí está de nuevo su dibujo en una máquina $1 \leftarrow x$.

$x^3 - 3x + 2 =$ 

$x+2 =$ 

Estamos buscando copias de $x+2$, un punto adyacente a dos puntos, en cualquier lugar del dibujo de $x^3 - 3x + 2$. No vemos ninguno.

Y no podemos des-explotar puntos porque no conocemos el valor de x. (No sabemos cuántos puntos dibujar para des-explotar.)

De momento la situación parece irremediable.

Pero les tengo una recomendación, de hecho, una útil en general en la vida. Es ésta.

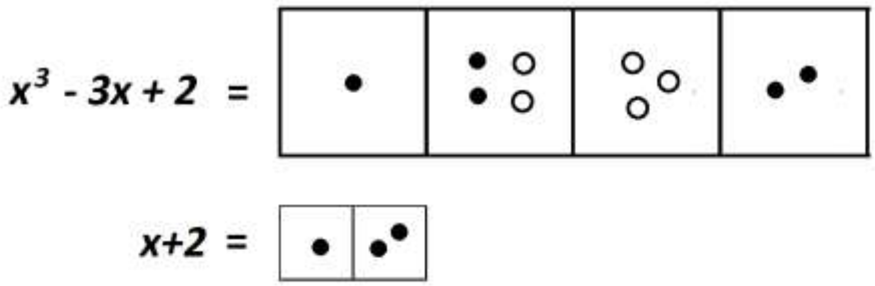
> **¡SI HAY ALGO EN LA VIDA QUE DESEAS, HAZLO REALIDAD!**
> **(Y atente a las consecuencias.)**

¿Hay algo que deseamos en la vida en este instante?

Observen el punto solitario en el extremos izquierdo. ¿No sería bueno tener dos puntos en la casilla adyacente para obtener una copia de $x+2$?

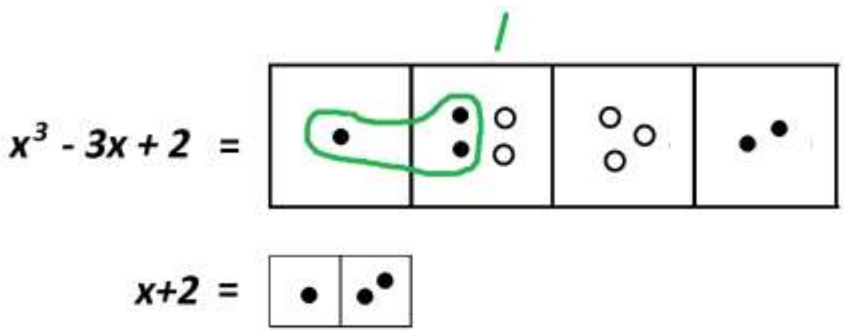
¡Entonces pongamos dos puntos en la casilla vacía! ¡Eso es lo que quiero, así que hagámoslo!

Pero hay consecuencias: esa casilla debería estar vacía, ¡y para mantenerla vacía podemos colocar también dos anti-puntos!



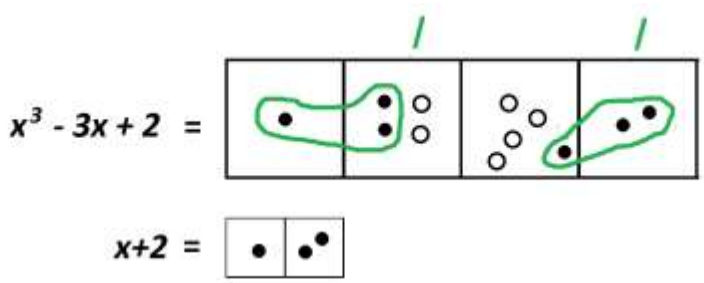
¡Brillante!

Ahora tenemos una copia de lo que buscábamos.



¿Hay algo más en la vida que desean en este instante? ¿Pueden crear otra copia de $x+2$ en algún lugar?

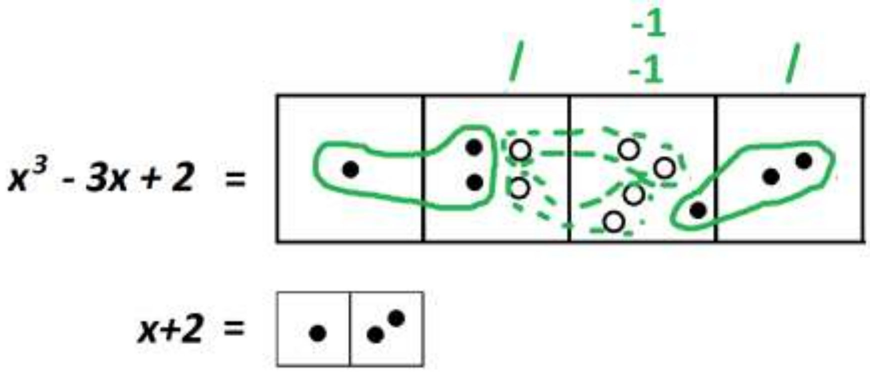
Yo personalmente quisiera tener un punto a la izquierda del par de puntos de la casilla del extremo derecho. ¡Lo voy a hacer realidad! Voy a insertar un punto y un anti-punto. Esto me proporciona otra copia de $x+2$.



Esto está todo muy bien, pero, ¿ahora estamos atascados? Quizás esta brillante idea no era tan útil después de todo.

Observen el dibujo por un rato. ¿Notan algo?

¡Miren bien y comenzaremos a ver copias precisamente de lo opuesto a lo que buscamos! En lugar de un punto junto a dos puntos, hay copias de un anti-punto junto a dos anti-puntos.



¡Woa!

¿Y cómo leemos la respuesta? Vemos que $\left(x^3-3x+2\right)\div\left(x+2\right)$ es x^2-2x+1.

¡Fabuloso!

Entonces en realidad les mentí acerca de haberlos estado engañando. De hecho sí podemos resolver todos los problemas de división de polinomios con este método de puntos y casillas, inclusive con números negativos!

Si están buscando algunos problemas de práctica, siéntanse libres de intentarlo con éstos. Inténtenlos sobre papel con lápiz, y luego quizás con la aplicación. Las respuestas, como de costumbre, están al final de esta lección.

4. Calculen $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$.

5. Prueben calcular $\dfrac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}$.

6. Si pueden hacer este problema, $\dfrac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}$, ¡probablemente pueden hacer cualquiera!

7. Este es locamente divertido: $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}$.

Aparte: ¿Existe una manera fácil de aplicar el método de puntos y casillas sobre papel con lápiz? En vez de dibujar puntos y casillas, ¿se puede trabajar con tablas de números que lleven la cuenta de los coeficientes? (La palabra *sintéticos* se usa frecuentemente para aquellos algoritmos que uno crea y que se alejan uno o dos pasos del proceso en mano.)

RESTOS

Identificar restos en los problemas de división en base x es igual de sencillo que en la aritmética de base 10.

Jueguen con

$$\frac{4x^4-7x^3+9x^2-3x-1}{x^2-x+1}$$

en máquina $1 \leftarrow x$. ¿Pueden ver que equivale a $4x^2-3x+3$ con un resto de $2x-3$ que aún queda por dividir entre x^2-x+1?

Típicamente la gente escribe esta respuesta de la siguiente manera:

$$\frac{4x^4-7x^3+9x^2-3x-1}{x^2-x+1}=4x^2-3x+2+\frac{2x-3}{x^2-x+1}.$$

He aquí varios problemas más de práctica por si quieren jugar un poco más con esta idea.

8. ¿Pueden deducir cuál será la respuesta a $\left(2x^2+7x+7\right)\div\left(x+2\right)$ antes de hacerlo?

9. Calculen $\dfrac{x^4}{x^2-3}$.

10. Intenten este problema loco: $\dfrac{5x^5-2x^4+x^3-x^2+7}{x^3-4x+1}$.

Si lo hacen con papel y lápiz, se verán en algún momento intentando dibujar 84 puntos. ¿No es más rápido y fácil simplemente escribir el número“84”? De hecho, ¿Qué tal escribir sólo los números en vez de punto en casillas?

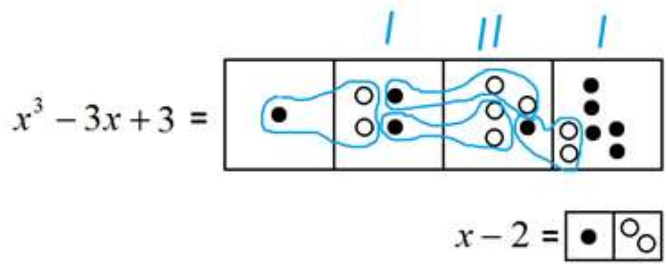
OPCIONAL: TEOREMA DEL RESTO

Los maestros de secundaria me han preguntado si es posible utilizar el método de puntos y casillas para explicar el "Teorema del Resto". Esta sección es opcional para quienes estén interesados en aprender acerca de las matemáticas detrás de esta pieza de álgebra de polinomios extra-avanzada.

ADVERTENCIA: ¡Esta sección no es apta para personas con debilidades cardíacas!

Examinemos $\frac{x^3-3x+3}{x-2}$. Esto es, el polinomio $p(x)=x^3-3x+3$ dividido por el polinomio simple (linear), $x-2$.

He aquí lo que obtengo con la máquina $1 \leftarrow x$. (Tuve que agregar pares de puntos/anti-puntos.) ¡Miren esto!



Vemos que $\frac{x^3-3x+3}{x-2}=x^2+2x+1+\frac{5}{x-2}$. Queda un resto de 5.

Pero veamos cuidadosamente el dibujo de x^3-3x+3, tomando nota de los lazos.

Vemos un lazo a nivel de x^2, dos a nivel de x, y uno a nivel de los unos. Además vemos un resto de 5. Como cada lazo representa la cantidad de $x-2$, esto quiere decir que

$$p(x)=x^3-3x+3=(x-2)\times x^2+2(x-2)\times x+(x-2)\times 1+5.$$

(Esto es un $x-2$ a nivel de x^2, dos a nivel de x, y uno a nivel de los unos, y 5.)

Esto demuestra que $p(x)$ es una combinación de $(x-2)$s más un 5 extra.

$$p(x)=\text{ multiples of } (x-2) \quad +5.$$

Este "$+5$" molesta como una espinilla. Si introducen un $x=2$ obtenemos

$$P(2) = \text{ multiples of } 0 \quad + 5 = 0 + 5 = 5.$$

En general, dividir un polinomio $p(x)$ por un término de la forma $x-h$ dará

$$p(x) = \text{ multiples of } (x-h) \quad + r$$

donde r es el resto. Poner $x = h$ demuestra que $p(h) = r$.

Este es el Teorema del Resto para polinomios.

Dividir un polinomio $p(x)$ *por un término* $x-h$ *da como resto un número sencillo igual a* $p(h)$*, el valor del polinomio en* $x = h$*.*

A la gente les gusta este teorema porque demuestra que si $p(h) = 0$ para algún número h, entonces $p(x)$ es un múltiplo de $x-h$. (El resto es cero.) Esto da el Teorema del Factor para polinomios.

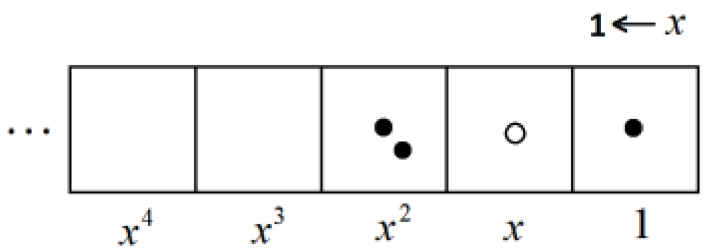
Un polinomio p *tiene un factor* $x-h$ *precisamente cuando* h *es el cero del polinomio, es decir, precisamente cuando* $p(h) = 0$*.*

Esto es importantísimo para la gente que esta interesada en las factorizaciones.

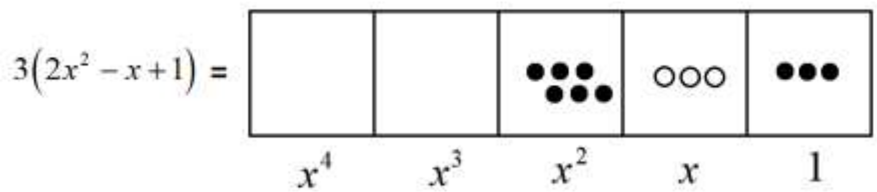
MULTIPLICACION DE POLINOMIOS

¿Podemos multiplicar polinomios? ¡Claro que sí!

He aquí el polinomio $2x^2 - x + 1$.

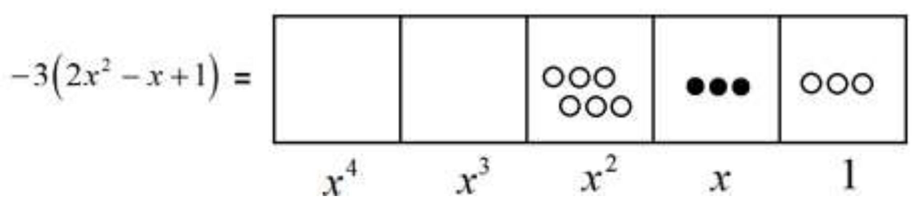


Si queremos multiplicar este polinomio por 3 sólo tenemos que reemplazar cada punto y anti-punto con tres copias del mismo. (Queremos triplicar todas las cantidades que vemos.)



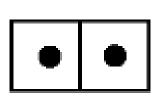
Literalmente vemos que $3\left(2x^2 - x + 1\right)$ es $6x^2 - 3x + 3$.

Supongamos en vez, que queremos multiplicar $2x^2 - x + 1$ por -3. Esto quiere decir que queremos la anti-versión de lo que sería triplicar todas las cantidades que vemos. Entonces cada punto en el dibujo de $2x^2 - x + 1$ es reemplazado por tres anti-puntos y cada anti-punto por tres puntos.



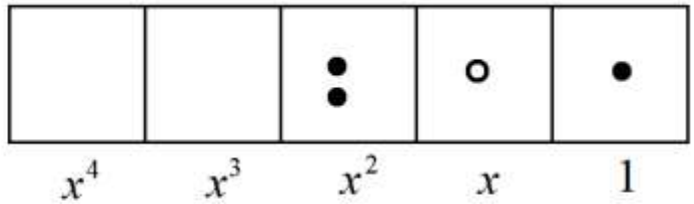
Tenemos que $-3\left(2x^2 - x + 1\right) = -6x^2 + 3x - 3$. También podríamos decir que $-3\left(2x^2 - x + 1\right)$ es la anti-versión de $3\left(2x^2 - x + 1\right)$.

Ahora supongamos que queremos multiplicar $2x^2 - x + 1$ por $x + 1$. Como $x + 1$ se ve así

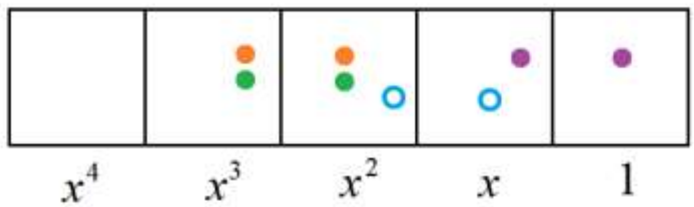


tenemos que reemplazar cada punto del dibujo de $2x^2 - x + 1$ por un-punto-y-un-punto, y cada anti-punto con su anti-versión, la cual es un-anti-punto-y-un-anti-punto. (¡Esto ahora se pone divertido!)

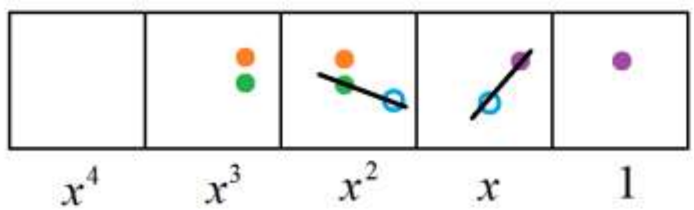
$2x^2 - x + 1 =$



$(x+1) \times (2x^2 - x + 1) =$

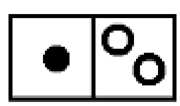


$=$

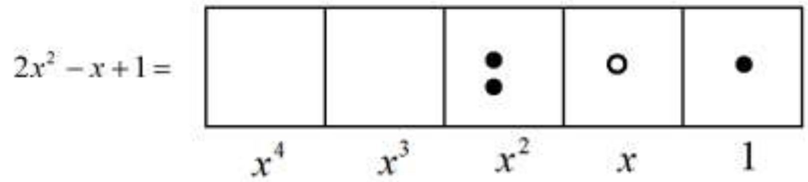


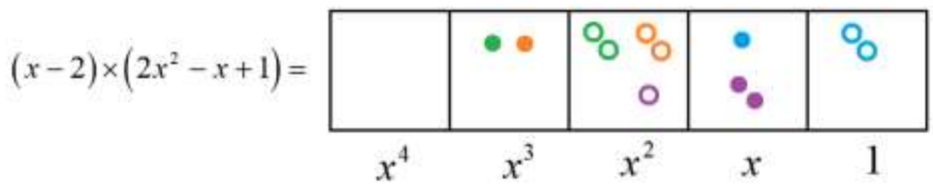
Luego de algunas aniquilaciones vemos que $(x+1) \times (2x^2 - x + 1)$ equivale a $2x^3 + x^2 + 1$.

Ahora multipliquemos $2x^2 - x + 1$ por $x - 2$, lo cual se ve a sí.



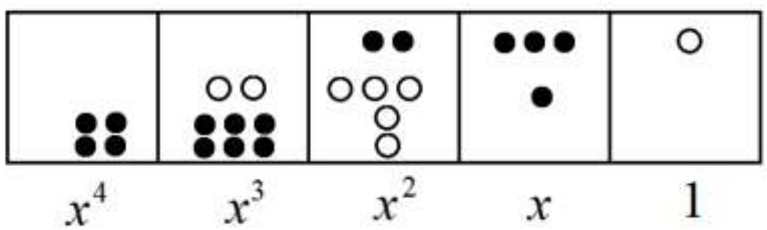
Cada punto deberá ser reemplazado por un-punto-y-dos-anti-puntos, y cada anti-punto con el opuesto a eso.





Vemos que $(x-2)(2x^2 - x + 1) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Bueno, su turno. Prueben $2x^2 - x + 1$ por $2x^2 + 3x - 1$. ¿Ven este dibujo? (¡Esta vez no lo he coloreado!) ¿Ven la respuesta $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$?



SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Sumar y restar polinomios en base x es igual a sumar y restar en base 10. ¡De hecho es más fácil! Como no conocemos el valor de x nunca explotaremos ningún punto. ¡Es decir, nunca tendremos necesidad de “llevar” como se hace en la aritmética en base 10!

$$\begin{array}{rr} & 2x^2 + 8x - 5 \\ + & 9x^2 + 7x + 6 \\ \hline = & 11x^2 + 15x + 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 10x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \\ - & 3x^3 + 8x^2 + 5x - 2 \\ \hline = & 7x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \end{array}$$

Si queremos podemos dibujar puntos y casillas en una máquina $1 \leftarrow x$.

EXPLORACIONES LOCAS

He aquí algunas investigaciones de "preguntas grandes" que quizás quieran explorar, o tan solo pensar sobre ellas. ¡Diviértanse!

EXPLORACION 1: ¿PODREMOS EXPLICAR UN TRUCO ARITMETICO?

He aquí una forma inusual de dividir por 9.

Para calcular $21203 \div 9$, digamos, lean "21203" de izquierda a derecha calculando la suma parcial de los dígitos a lo largo del camino

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{2} & \mathbf{=2} \\
\mathbf{2+1} & \mathbf{=3} \\
\mathbf{2+1+2} & \mathbf{=5} \\
\mathbf{2+1+2+0} & \mathbf{=5} \\
\mathbf{2+1+2+0+3} & \mathbf{=8}
\end{array}
$$

y entonces lean la respuesta

$$21203 \div 9 = 2355 \ R \ 8 .$$

De la misma manera,

$$1033 \div 9 = 1 |\ 1+0\ | 1+0+3 | \quad R \quad 1+0+3+3 \quad = 114 \ R \ 7$$

y

$$2222 \div 9 = 246 \ R \ 8 .$$

¿Pueden explicar por qué este truco funciona?

He aquí el enfoque que yo le daría: Para el primer ejemplo, hagan el dibujo de 21203 en una máquina $1 \leftarrow 10$, pero piensen en los nueves como $10-1$. Es decir, busquen copias de $\boxed{\bullet \mid \circ}$ en el dibujo.

EXPLORACION 2: ¿PODREMOS EXPLICAR LA TEORIA DE NUMEROS?

Usen una máquina $1 \leftarrow x$ para calcular cada uno de los siguientes

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ c) $\dfrac{x^6 - 1}{x - 1}$ d) $\dfrac{x^{10} - 1}{x - 1}$

¿Ahora pueden ver que $\dfrac{x^{\text{number}} - 1}{x - 1}$ siempre tendrá una respuesta más bonita sin un resto?

Otra manera de decir esto es

$$x^{\text{number}} - 1 = (x - 1)\,´\,(\text{something}).$$

Por ejemplo, podrán haber visto en la parte c) que $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. ¡Esto quiere decir que podemos decir, por ejemplo, que $17^6 - 1$ debe de seguro ser un múltiplo de 16! ¿Cómo? Simplemente elijan $x = 17$ en esta fórmula para obtener

$$17^6 - 1 = (17 - 1) \times (\text{something}) = 16 \times (\text{something}).$$

a) Expliquen por qué $999^{100} - 1$ debe ser un múltiplo de 998.

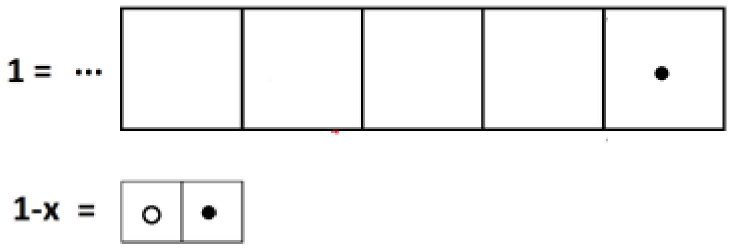
b) ¿Pueden explicar por qué $2^{100} - 1$ debe ser un múltiplo de 3, y un múltiplo de 15, y un múltiplo de 31 y un múltiplo de 1023? (Pista: $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}$, y así sucesivamente.)

c) ¿Es $x^{\text{number}} - 1$ siempre un múltiplo de $x + 1$? ¿Por lo menos a veces?

d) El número $2^{100} + 1$ no es primo. Es un múltiplo de 17. ¿Pueden ver cómo probar esto?

EXPLORACION 3: ¿UNA RESPUESTA INFINITA?

He aquí el dibujo del muy sencillo polinomio 1 y del polinomio $1-x$.



¿Pueden calcular $\dfrac{1}{1-x}$? ¿Pueden interpretar la respuesta?

(Exploraremos este ejemplo en el siguiente capítulo.)

SOLUCIONES

Como fue prometido, aquí están mis respuestas a las preguntas planteadas.

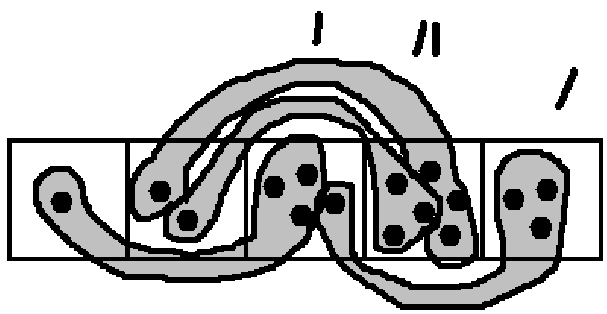
1.

a) $\left(2x^4+3x^3+5x^2+4x+1\right)\div\left(2x+1\right)=x^3+x^2+2x+1$

b) $\left(x^4+3x^3+6x^2+5x+3\right)\div\left(x^2+x+1\right)=x^2+2x+3$

Y si por casualidad x es 10, acabamos de calcular $23541\div 21=1121$ y $13653\div 111=123$.

2. Lo podemos hacer. La respuesta es x^2+2x+1.



3.

a) Para $x=10$ dice que $14641\div 11=1331$

b) Para $x=2$ dice que $81\div 3=27$

c) Para $x=3$ dice que $256\div 4=64$
Para $x=4$ dice que $625\div 5=125$
Para $x=5$ dice que $1296\div 6=216$
Para $x=6$ dice que $2401\div 7=343$
Para $x=7$ dice que $4096\div 8=512$
Para $x=8$ dice que $6561\div 9=729$
Para $x=9$ dice que $10000\div 10=1000$
Para $x=11$ dice que $20736\div 12=1728$

d) Para $x=0$ dice que $1\div 1=1$.

e) Para $x=-1$ dice que $0\div 0=0$. ¡Hmm! ¡Eso está sospechoso! (¿Se puede tener una máquina 1←0?)

4. $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}=x^2-x+1$.

5. $\dfrac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}=2x^2-4x+1$.

6. $\dfrac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}=4x^3+2x^2+5x-1$.

7. $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}=x^8+x^6+x^4+x^2+1$.

8. Sabemos que $\left(2x^2+7x+6\right)\div\left(x+2\right)=2x+3$ entonces apuesto a que $\left(2x^2+7x+7\right)\div\left(x+2\right)$ resulta ser $2x+3+\dfrac{1}{x+2}$. ¿Lo es?

9. $\dfrac{x^4}{x^2-3}=x^2+3+\dfrac{9}{x^2-3}$.

10. $5x^2-2x+21+\dfrac{-14x^2+82x-14}{x^3-4x+1}$.