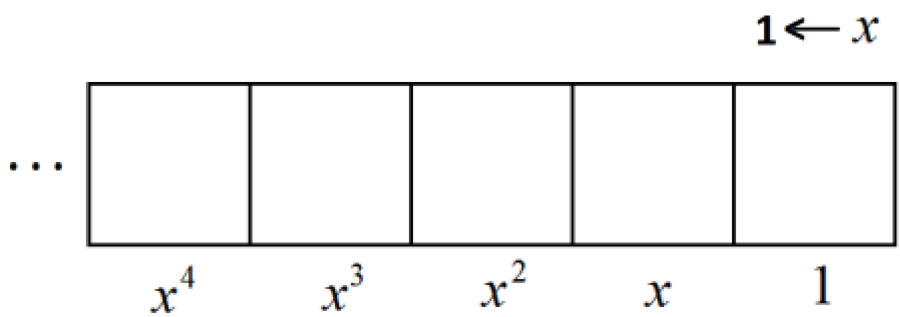
ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ
ГЛАВА 7

БЕЗКРАЙНИ СУМИ

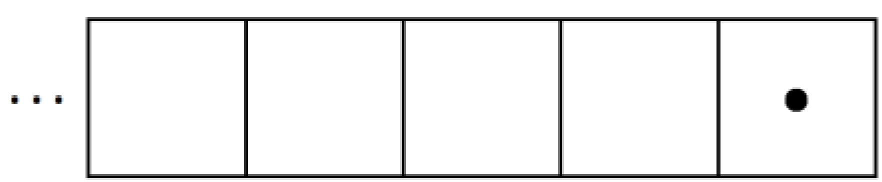
В миналата глава ние си поиграхме с $1 \leftarrow x$ машината и видяхме способността на тази машина да превръща гимназиалната алгебра за напреднали в нещо толкова естествено и лесно.

В тази глава, нека премахнем всички ограничения и позволим на машината да ни потопи в безкрайното! И ще бъде също толкова естествено и лесно.

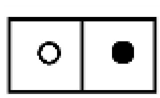
Вижте отново $1 \leftarrow x$ машината.



Нека използваме тази машина, за да изчислим следната странна задача за деление: $\frac{1}{1-x}$. Това е, простичкият полином 1, който изглежда така



разделен на полинома $1-x$, който изглежда така, една антиточка и една точка.



Виждате ли копия на тази двойка, съставена от една антиточка и една точка, в картинката на полинома 1? Не!

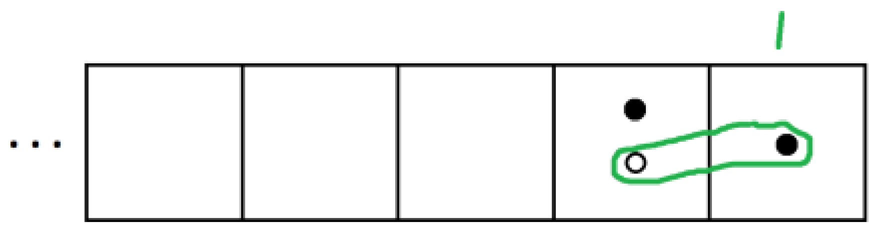
Но помнете

Ако има нещо в живота, което искате да се случи, направете го! (И си понесете последствията.)

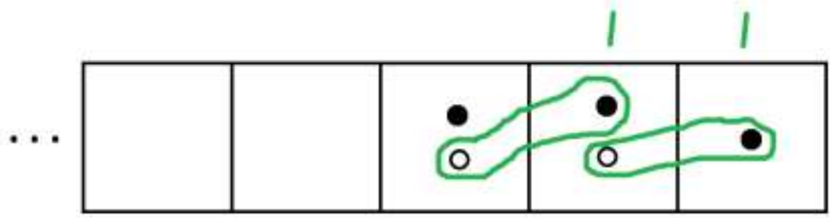
Можем ли да направим така, че двойки от по една антиточка и една точка да се появят на картинката? Нямаше ли да е чудесно ако имахме една антиточка вляво от точката, която вече имаме?

Е, нека да превърнем това в реалност!

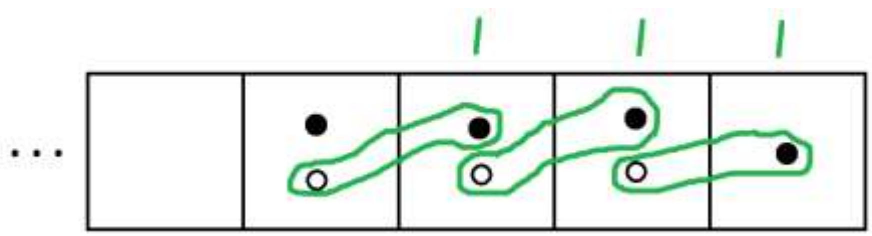
За да запазим тази кутия на практика празна, трябва да добавим и една точка. Получихме едно копие на това, което искаме.



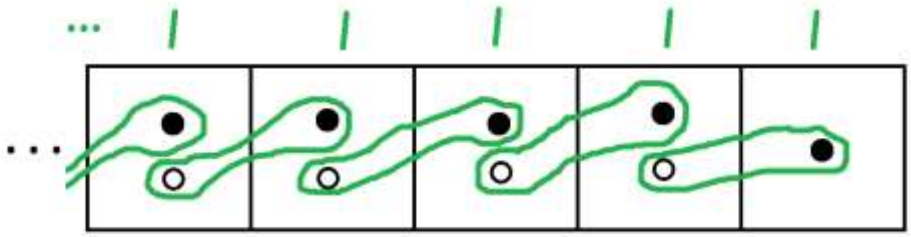
И можем да го направим отново.



И отново.



Всъщност, ние виждаме, че можем да правим това вечно!



Уау!

Как да прочетем отговора в такъв случай?

Е, имаме една 1ца, едно x, едно x^2, едно x^3 и т.н. Тоест, имаме, че

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

.

Отговорът е една безкрайна сума.

Равенството, което получихме, е една много известна формула в математиката. Нарича се *формулата за геометрична прогресия* и често я пише в много учебници по математика в горните класове на гимназията, за да може учениците да я използват. Но учебниците често записват тази формула наобратно и с буквата r вместо буквата x.

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

В час по диференциално и интегрално смятане може да ви кажат, че току що изчислихте реда на Тейлър на рационалната функция $\frac{1}{1-x}$. Това звучи страшно! Но това, което направихме с точките и кутиите на беше никак страшно. Всъщност беше даже забавно!

Ето още няколко въпроса, които можете да опитате, ако искате. (И всеки въпрос ни казва какъв трябва да е отговора!)

1. Използвайте методът с точките и кутиите, за да покажете, че $\frac{1}{1+x}$ е равно на $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$.

2. Изчислете $\frac{x}{1-x^2}$. Получавате ли сума на нечетните степени на x?

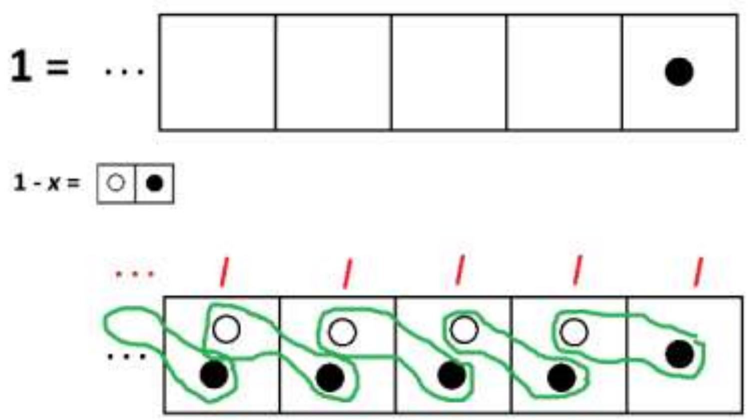
Следващият въпрос е особено готин! Препоръчвам ви да нарисувате големи кутии, когато правите картинката си. (Броят на точките, които ще ви се наложи да слагате става много голям доста бързо.)

3. Изчислете $\frac{1}{1-x-x^2}$ и преоткрийте известната редица на Фибоначи!

ПО ЖЕЛАНИЕ: МОЖЕМ ЛИ ДА ВЯРВАМЕ НА БЕЗКРАЙНИТЕ СУМИ?

Формулата за геометрична прогресия е $1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$.

Видяхме това като взехме полинома 1 и го разделихме на полинома $1-x$. Безкрайната сума от степени на x се появява естествено.



Но тази формула вярна ли е наистина?

Какво ще стане ако вземем x да е, например, числото 2? Тогвав формулата за геометрична прогресия ни дава $1+2+4+8+16+\cdots$ е равно на $\dfrac{1}{1-2}$, което е -1. Това е просто абсурдно!

От друга страна, да вземем $x=0.1$. Тогава формулата за геометрична прогресия ни казва, че

$$\begin{aligned}1+(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots &= 1+0.1+0.01+0.001+\cdots \\ &= 1.111\ldots\end{aligned}$$

е равно на

$$\frac{1}{1-0.1}=\frac{1}{0.9}=\frac{10}{9}.$$

Което е едно и една девета. От основното училище знем, че $\dfrac{1}{9}$, записано като десетична дроб е $0.111\ldots$ (или вижте глава 8). Така че едно и една девета прави точно $1.111\ldots$. Формулата за геометрична прогресия е вярна в този случай!

$$1+(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots=\frac{1}{1-0.1}.$$

Какво става? Кога можем да вярваме на формулата и кога не?

АЛГЕБРАТА СРЕЩУ АРИТМЕТИКАТА

$1 \leftarrow x$ машината е машина, която изобразява механична алгебра. Всичко, което тя прави можем да заключим, че е вярно от гледна точка на механичната алгебра.

Например формулата за геометрична прогресия ни казва, че $1+2+4+8+\cdots$ е равно на $\frac{1}{1-2}$, което е абсурд от гледна точка на аритметиката. Само че от чисто математическа гледна точка, без да взимаме предвид аритметиката, има нещо вярно в това твърдение. Ето как можем да видим истината.

> Ако $1+2+4+8+\cdots$ е равно на $\frac{1}{1-2}$, тогава ако умножим $1+2+4+8+\cdots$ по $1-2$ трябва да получим 1. Така ли е?
>
> Да, така е!
>
> $$\begin{aligned}(1-2)\times(1+2+4+8+\cdots) &= (1-2)+(1-2)\times 2+(1-2)\times 4+(1-2)\times 8+\cdots \\ &= 1-2+2-4+4-8+8-16+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots \\ &= 1.\end{aligned}$$
>
> Така че $1+2+4+8+\cdots$ наистина се държи като $\frac{1}{1-2}$.

Но все пак, това не е много удовлетворяващо. Ние искаме да знаем кога твърдението $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$ е вярно аритметично равенство.

ОТГОВОРЪТ ОТ ГЛЕДНА ТОЧКА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО И ИНТЕГРАЛНОТО СМЯТАНЕ (ЗА ДРЪЗКИТЕ)

В час по диференциално и интегрално смятане се учат безкрайни суми. Например, там се учи, че

$1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ е вярно артиметично твърдение само за малки стойности на x (в частност за всички стойности на x строго между -1 и 1.) Формулата е валидна за $x=0.1$, както видяхме, но не и за $x=2$.

Ако сте навити, ето как изглежда разсъждението.

Обикновено деление на полиноми ни дава, че $\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x$, $\dfrac{1-x^3}{1-x}=1+x+x^2$, $\dfrac{1-x^4}{1-x}=1+x+x^2+x^3$ и т.н. (Опитайте да ги докажете!) В частност, виждаме, че $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$.

А сега, щом пуснем n да става все по-голямо и все по-голямо, изглежда, че получаваме една безкрайна геометрична сума.

$$
\begin{array}{ccc}
1+x & = & \dfrac{1-x^2}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2 & = & \dfrac{1-x^3}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2+x^3 & = & \dfrac{1-x^4}{1-x} \\[2ex]
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\[2ex]
1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \textbf{?}
\end{array}
$$

Така че въпросът е: Към кое число се приближава $\dfrac{1-x^n}{1-x}$ когато n става по-голямо и по-голямо? Ако този въпрос има отговор, то този отговор би бил стойността на

$1+x+x^2+x^3+\cdots$.

Е, има ли $\frac{1-x^n}{1-x}$ гранична стойност? Всъщност това зависи от това дали x^n има гранична стойност или не, когато n расте неограничено. За кои стойности на x степените му се приближават до една стойност?

Знаем, че степените на 0.1, например, и на 0.83 и на $-\frac{1}{2}$ с е приближават до нула за по-големи и по-големи степени. Всъщност, x^n става по-близо и по-близо до нулата, когато n расте неограничено, за всяка стойност на x между -1 и 1.

Така че за $-1<x<1$, имаме

$$
\begin{array}{ccc}
1+x & = & \frac{1-x^2}{1-x} \\
1+x+x^2 & = & \frac{1-x^3}{1-x} \\
1+x+x^2+x^3 & = & \frac{1-x^4}{1-x} \\
\downarrow & & \downarrow \\
1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \frac{1-0}{1-x}=\frac{1}{1-x}
\end{array}
$$

Формулата за геометрична прогресия е вярна от гледна точка на аритметиката поне за $-1<x<1$.

ЧЕСТНИЯТ ПОДХОД

Друг подход, чрез който можем да изследваме формулата за геометрична прогресия, започва с едно предположение, в което просто ще повярваме. Нека предположим, че безкрайната сума $1+x+x^2+x^3+\cdots$ има смисъл и има числов отговор. Нека наречем този отговор S. Тогава

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ &= 1 + x\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\ &= 1 + xS \end{aligned}$$

откъдето получаваме, че $S = \dfrac{1}{1-x}$.

Този подход е честен. Той доказва следното: <u>*АКО*</u> *безкрайната сума* $1 + x + x^2 + \cdots$ *има отговор, то този отговор трябва да бъде* $\dfrac{1}{1-x}$. Той не отговаря на въпроса дали безкрайната сума наистина има смисъл и има отговор.

Същото нещо е вярно и за подхода с точките и кутиите, защото той също доказва, че: <u>АКО</u> изразът $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ има някакъв смисъл, но той трябва да е равен на $\dfrac{1}{1-x}$. От вас зависи да решите дали тази безкрайна сума е смислена. (Според диференциалното и интегралното смятане това е така когато $-1 < x < 1$.)

ДРУГИ АРИТМЕТИЧНИ СИСТЕМИ НИ ПРЕДЛАГАТ ДРУГИ НАЧИНИ ДА ВИДИМ СМИСЪЛА

Твърдението $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$ няма смисъл в обикновената аритметика. Но кой ни ограничава да стоим в рамките на обикновената аритметика? Има ли по-необикновен начин да погледнем на нещата?

Ние обикновено виждаме числата като разделени едно от друго на числовата ос адитивно, тоест, като обекти, които можем да събираме. Тоест, ако вървите една стъпка надясно от числото 0 ще се озовете на позиция 1. А сега добавете още две стъпки и ще се озовете на позиция 3. Сега прибавете още четири стъпки и ще се озовете на позиция 7 и т.н. Сумата $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, от тази гледна точка отива безкрайно надалеч от числото 0 на числовата ос.

$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \infty$ в обикновената аритметика. Изразът не е равен на -1.

Но нека сега си мислим за числата мултипликативно, тоест, като обекти, които можем да умножаваме. В частност, понеже сме се съсредоточили върху сумата $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, нека си мислим за множители, делители и степени на двойката.

Сега 0 е едно число, което е супер делимо. То е най-делимото число от всички. Ако погледнем делимостта му само на степените на числото две, то то се дели на 2 веднъж, даже два пъти, всъщност три. Оказва се, че можете да делите 0 на две колкото си пъти искате — и пак ще можете да го разделите още.

Що се отнася за делимост на две, числото 8 някак си прилича на нулата: можете да го разделите на две три пъти. Но числото 32 прилича даже още повече на нулата: можете да го разделите на две пет пъти. И 2^{100} даже още повече прилича на нулата.

Така че от тази гледна точка, 2^{100} е число, което е много близко до числото 0. Числото 32 е горе-долу близо до 0. Числото 8 е по-малко близо. Числото 1 въобще не е близо до нулата: дори един път не можем да го разделим на две.

Така че, в този контекст, възможно ли е $1+2+4+8+\cdots$ да бъде равно на -1?

Е,

$$\begin{aligned}
&1+2=3 && =4-1\\
&1+2+4=7 && =8-1\\
&1+2+4+8=15 && =16-1\\
&\vdots && \\
&1+2+\cdots+2^{99} && =2^{100}-1
\end{aligned}$$

Тези крайни суми растат и се превръщат в “число много близо до нулата минус едно.” Значи граничната стойност на безкрайната сума има стойност $0-1=-1$, също както излезе от формалните разсъждения.

Значи като погледнем на аритметиката от тази мултипликативна гледна точка, изразът $1+2+4+8+\cdots$ има смисъл и има стойност, която наистина е равна на -1. Формулата за геометрична прогресия е вярна и смислена за $x=2$ в този контекст.

Изводът е, че нашият подход с точките и кутиите ни казва какъв трябва да бъде отговора, АКО безкрайната сума има някакъв смисъл. Следователно от вас зависи в какъв аритметичен контекст ще решите да си играете с нея и дали безкрайната сума, която разглеждате, ще има смисъл в този контекст. Ако има такъв, тогава точките и кутиите ще ви кажат правилния отговор!