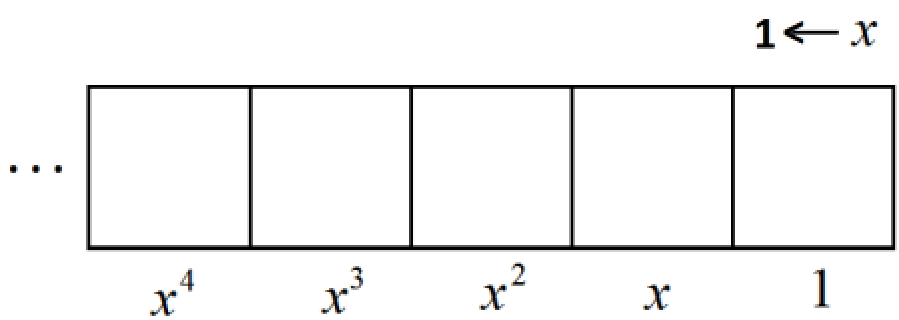
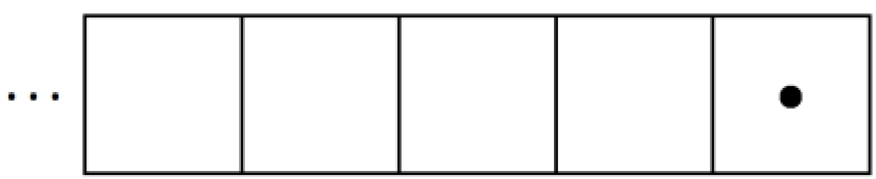
EXPLODING DOTS
CHAPTER 7

第七章 无穷级数

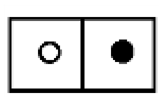
In the previous chapter we played with the $1 \leftarrow x$ machine and saw the power of that machine to make advanced school algebra so natural and straightforward.
在前面的几章里，我们学到了$1 \leftarrow x$**机制，也学到了如何用它**简单**直接地来解决高中的代数**问题。
在这章我们将讨论无穷级数，你会发现这个问题也一样的简单直接。
先来看$1 \leftarrow x$**的**图：



我们来计**算一个很**简单**的除法**问题： $\frac{1}{1-x}$。**上面的被除数是多**项式 1，如下图：



除数是 $1-x$，**由一个空心点和一个**实**心点构成**：

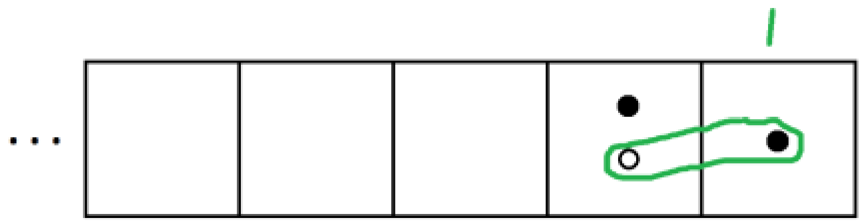


你能在 1 里面找到一个空心加一个实心点的组合吗？没有！
但是记住

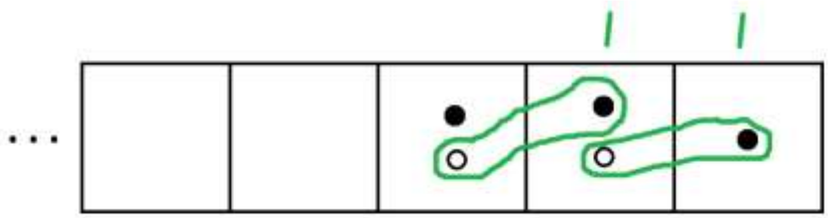
如果生活没有给你想要的东西，你可以创造条件让它发生（但是注意后果！）

Can we make antidiot-dot pairs appear in the picture? Wouldn't it be nice to have an antidot to the left of the one dot we have?
我们怎么样才能在 1 的图里找到一个空心一个实心点的组合呢？如果在代表 1 的左边有一个空心点就最好啦。那我们就直接放一个空心点进来。

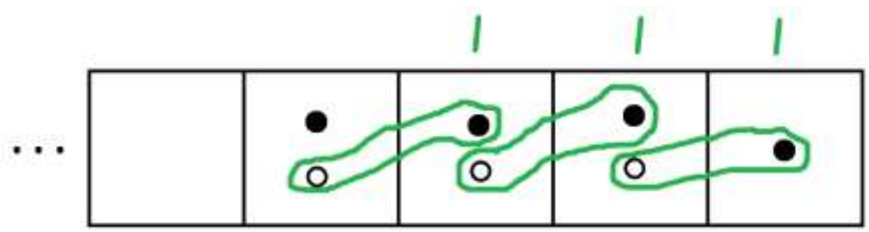
记住为了不改变被除数，放进去一个空心点之后，我们还需要在放进去一个实心点，这样我们就得到了一组我们想要的空心加实心点的组合：



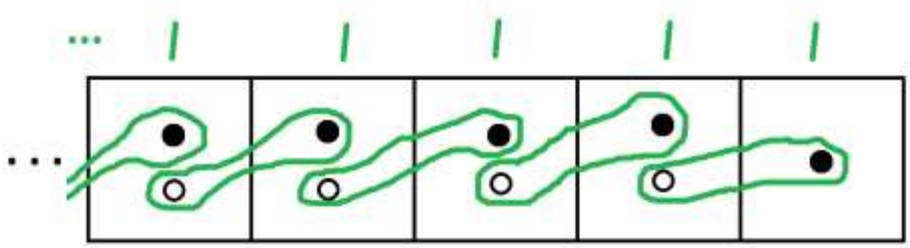
我们可以重复这个做法：



再重复：



事实上，你看到我们可以一直这样做下去：



哇哦！我们怎么解释得到的这个答案呢？

很明显，我们得到一个1, 一个 x, 一个x^2, 一个x^3等等. 我们得到的是

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots.$$

事实上我们的答案是一个无穷级数。

我们上面得到的是一个非常有名的数学公式。它叫做几何级数，很多高中教材里都有提到。但是教科书里通常是反过来写的，而且常用的是字母r，而不是x.

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}.$$

在微积分课程里，我们有时候会需要计算$\frac{1}{1-x}$的泰勒级数。听起来很可怕！但是我们刚才用点和框的方法做的一点都不可怕，事实上还很好玩对不对？

下面是一些例子，你可以自己试试。

1. 用点和框的方法证明 $\frac{1}{1+x}$ equals $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$.

2. 计算 $\frac{x}{1-x^2}$. 你得到一个x奇数幂次的无穷级数吗?

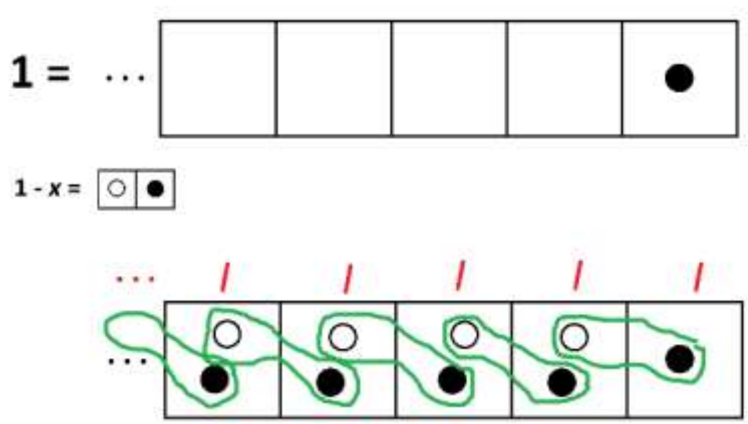
下一个问题非常酷，我建议你画一个很大的框，因为你会需要画很多点。

3. 计算 $\frac{1}{1-x-x^2}$ ，你会发现你得到了斐波那契数列！

选做：我们应该相信无穷级数吗？

几何级数的公式是 $1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$.

我们看到用多项式$1-x$去除1我们得到了x所有指数的和。



但是这个公式真的对吗？

如果 x 等于 2，会发生什么？这个几何级数给我们的是$1+2+4+8+16+\cdots$ 等于 $\dfrac{1}{1-2}$, 也就是 is -1. 这个结论太奇怪了！

如果 $x=0.1$呢？这个几何级数给我们的是

$$\begin{aligned}1+(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots&=1+0.1+0.01+0.001+\cdots\\&=1.111\ldots\end{aligned}$$

等于

$$\frac{1}{1-0.1}=\frac{1}{0.9}=\frac{10}{9}\ .$$

也就是是一又九分之一。我们小学的时候就学过$\dfrac{1}{9}$ 的小数形式是 $0.111\ldots$ (或者看第 8 章). 所以一又九分之一就等于$1.111\ldots$ 也就是说这次这个几何级数的公式是对的！

$$1+(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots=\frac{1}{1-0.1}\,.$$

这是怎么回事？到底什么时候我们可以相信这个公式什么时候不能呢？

代数与算数

$1 \leftarrow x$ 机制表示的是机械的代数运算。我们目前做的所有的运算在机械代数看来都是正确的。

比如几何级数的公式说 $1+2+4+8+\cdots$ 等于 $\frac{1}{1-2}$，这个在算数看来是很奇怪的。然而，从一个纯机械的角度来看，不考虑算数，这个公式并不完全错误。下面是我们的解释：

> 如果 $1+2+4+8+\cdots$ 等于 $\frac{1}{1-2}$，那么用 $1+2+4+8+\cdots$ 乘以 $1-2$ 我们应该得到 1. 是吗？是的！
>
> $$\begin{aligned}(1-2)\times(1+2+4+8+\cdots) &= (1-2)+(1-2)\times 2+(1-2)\times 4+(1-2)\times 8+\cdots \\ &= 1-2+2-4+4-8+8-16+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots \\ &= 1.\end{aligned}$$
>
> 所以 $1+2+4+8+\cdots$ 真的和 $\frac{1}{1-2}$ 是一样的.

但是这个解释似乎不那么完美。我们想理解从算数的角度来看，$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$ 到底什么时候是真的。

微积分的解释

每个上过微积分的学生都学过无穷级数。我们知道当 x 的值很小的时候 $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$ 是正确的 (具体点，所有的 -1 和 1 之间的值.) 这个公式对 $x=0.1$ 成立, 但是对 $x=2$ 不成立.

如果你想知道真正的原因，下面是我们在微积分里如何推导这个结论。

> 长除法告诉我们 $\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$，还有 $\frac{1-x^3}{1-x}=1+x+x^2$
>
> $\frac{1-x^4}{1-x}=1+x+x^2+x^3$, 等等（你可以自己试试）。一般来说，我们得到
>
> $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$.

现在让 n 增长，我们似乎要得到之前的几何级数了。

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

$$1+x+x^2+x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \textbf{?}$$

所以现在问题是：当 n 变得越来越大的时候，$\dfrac{1-x^n}{1-x}$ 会变成什么？这个问题有答案吗？如果有，答案会是 $1+x+x^2+x^3+\cdots$ 吗？

问题是 $\dfrac{1-x^n}{1-x}$ 有极限吗？这要取决于 x^n 在 n 增长的时候有没有极限。所以我们的问题变成了对于哪些 x 的值，x^n 会有一个极限呢？

我们知道当指数变得越来越大的时候， 0.1, 0.83 $-\dfrac{1}{2}$ 这些数的指数都会趋近于 0 。事实上，对于所有-1 和 1 之间的数字，当指数 n 增长时， x^n 会越来越趋近 0.

这样对于 $-1<x<1$, 我们得到

$$\begin{array}{ccc}
1+x & = & \dfrac{1-x^2}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2 & = & \dfrac{1-x^3}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2+x^3 & = & \dfrac{1-x^4}{1-x} \\[2ex]
\downarrow & & \downarrow \\[2ex]
1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \dfrac{1-0}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}
\end{array}$$

所以结论是对于$-1<x<1$， 这个几何级数是正确的。

诚实的方法

证明几何级数的收敛性还有另一个方法。我们需要先假设这个级数存在$1+x+x^2+x^3+\cdots$，令它为 S . 那么

$$\begin{aligned}
S &= 1+x+x^2+x^3+\cdots \\
&= 1+x\left(1+x+x^2+\cdots\right) \\
&= 1+xS
\end{aligned}$$

这样我们就得到$S=\dfrac{1}{1-x}$.

这是一个诚实的方法。它证明的是：如果无穷级数 $1+x+x^2+\cdots$ 收敛，那么它一定是$\dfrac{1}{1-x}$. 这个方法并没有证明到底这个几何级数是否存在。

同样的当我们用点和框的办法来解决这个问题的时候，前提条件是假设这个无穷级数$1+x+x^2+x^3+\cdots$存在，那么结果是$\dfrac{1}{1-x}$. 至于它到底是不是存在，需要你来证明。 (在微积分里我们说需要$-1<x<1$.)

OTHER SYSTEMS OF ARITHMETIC OFFER OTHER MEANINGS
算数在其它系统里的不同含义

等式$1+2+4+8+\cdots=-1$ 在通常的算数里是没有意义的。但是谁规定了我们一定要生活在普通的算数里？有没有不同的角度呢？

我们通常把数字看做是数轴上的分散开的点，它们遵守加法。从 0 往右走一步，我们得到 1，再走两步我们得到 3，再走 4 步 我们就得到了 7. 这个无穷级数$1+2+4+8+\cdots$在 0 的无限远处, 也就是说

$$1+2+4+8+\cdots=\infty \text{ 并不是 } -1.$$

我们也可以从乘法的角度来看数字。尤其当我们关注点在$1+2+4+8+\cdots$上时，我们把这些数字看作是 2 的指数。

事实上 0 是一个能被所有数字整除的数。它可以被 2 整除一次，两次，三次 甚至无限多次。
数字 8 也很像是 0： 我们可以用 2 除以 8 三次； 32 在这个意义上也很像 0： 我们可以用 2 除以 32 五次。 2^{100} 就更像 0 了。

所以从这个角度出发， 2^{100} 和 0 非常接近。数字 32 和 0 比较接近。 8 和 0 就没有那么近。 数字 1 和 0 就一点都不近了： 它一次也不能被 2 整除。

所以这个角度看来， 有没有可能 $1+2+4+8+\cdots$ 真的等于 -1呢?

$$\begin{aligned}
&1+2=3 && =4-1\\
&1+2+4=7 && =8-1\\
&1+2+4+8=15 && =16-1\\
&\vdots\\
&1+2+\cdots+2^{99} && =2^{100}-1
\end{aligned}$$

这些有限和一直增长到“一个和 0 很接近的数字，再减去 1”. 用极限的角度来看，这个无穷级数就应该等于$0-1=-1$, 正是我们想要证明的。
所以如果用乘法的角度来看这个等式， $1+2+4+8+\cdots$ 是有意义的，而且值的确是-1. 事实上即使 $x=2$ 这个几何级数也成立。

我们想说明的是点和框的方法可以得到很多无穷级数的解，但是前提是这个无穷级数有意义。 至于它们到底是不是有意义，需要你来决定。如果答案是肯定的，那么点和框的办法就会告诉你结果是什么。