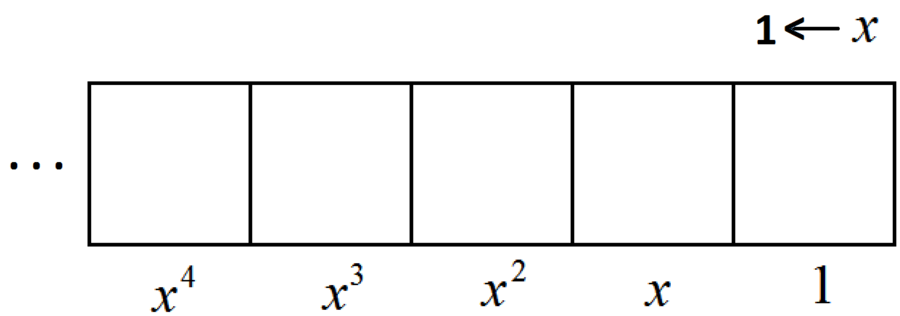
ТАЧКЕ КОЈЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ
ПОГЛАВЉЕ 7

БЕСКОНАЧНИ ЗБИРОВИ

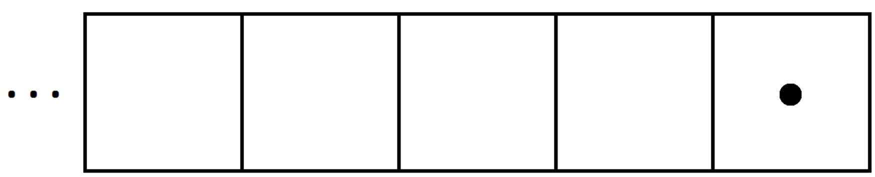
У претходном поглављу играли смо се са машином $1 \leftarrow 10$ и видели смо њену моћ да учини напредну школску алгебру тако природном и једноставном.

Хајде да у овом поглављу ту моћ увећамо до бесконачности! А то ће бити исто природно и једноставно.

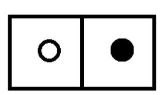
Пођимо поново од машине $1 \leftarrow x$.



И хајде да уз помоћ ове машине израчунамо овај чудан задатак са дељењем: $\frac{1}{1-x}$. Ево врло једноставног полинома 1, чија слика изгледа овако:



и подељен је са $1 - x$, чија слика изгледа овако, има једну антитачку и једну тачку.



Да ли на слици која приказује само 1 видите било који пар антитачке и тачке? Па, баш и не!

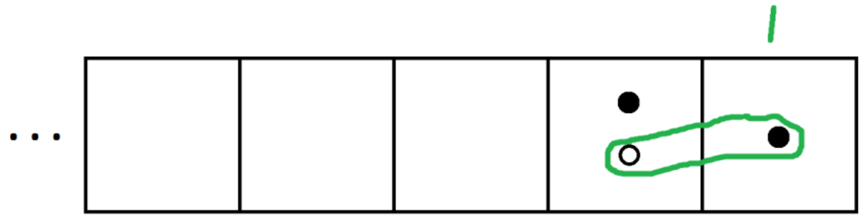
Али, присетите се:

Ако у животу постоји нешто што бисте желели, учините то! (И суочите се са последицама.)

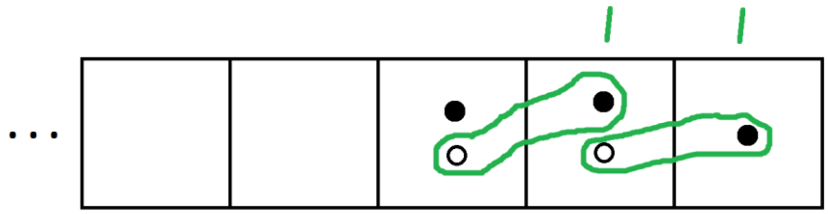
Можемо ли учинити да се на слици појаве парови које чине антитачка и тачка? Зар не би било лепо да имамо антитачку са леве стране те једне тачке коју имамо?

Па, учините то!

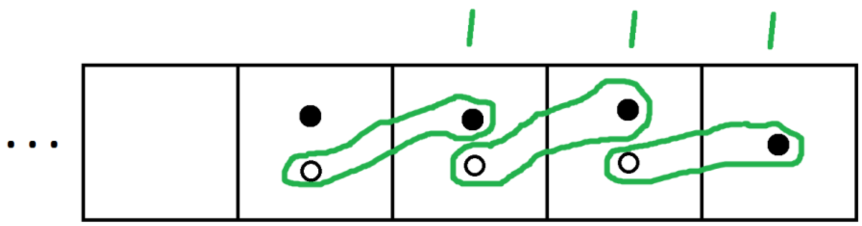
И да би та кутија технички и даље била празна, морамо да додамо и једну антитачку. Тако смо добили један примерак онога што нам треба.



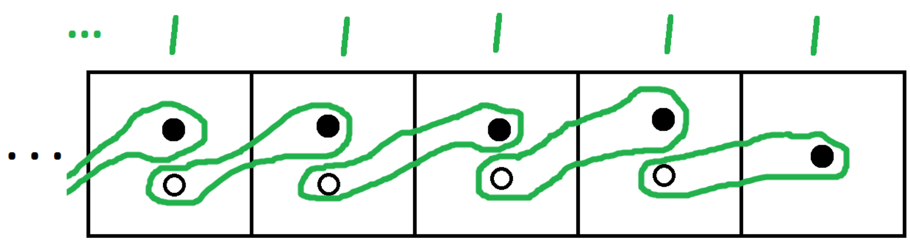
И можемо то да урадимо поново.



И још једном.



Штавише, можемо приметити да ћемо ово радити до у бесконачност!



Вау!

Како читамо овај резултат?

Па, имамо једно 1, и једно x, и једно x^2, и једно x^3, итд. Биће:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Резултат је бесконачни збир.

Једнакост коју смо добили заправо је веома позната формула у математици. Назива се *формула за геометријски ред* и често се налази у напредним средњошколским уџбеницима. Али тамо се формула често пише обрнутим редоследом, и уместо слова x обично се употребљава слово r.

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1 - r}$$

На часу на коме се учи диференцијални и интегрални рачун, могло би да се каже да смо управо израчунали Тејлоров ред рационалне функције $\frac{1}{1-x}$. То звучи застрашујуће! Али посао који смо одрадили уз помоћ тачака и кутија показује да то уопште није страшно. Уствари, чак је и забавно!

Ево вам неколико задатака, покушајте да их урадите уколико сте расположени за то. (И у сваком задатку наведено је који резултат треба да се добије!)

1. Уз помоћ тачака и кутија покажите да је $\frac{1}{1+x}$ једнако $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$.
2. Израчунајте $\frac{x}{1-x^2}$. Да ли сте добили збир непарних степена од x?

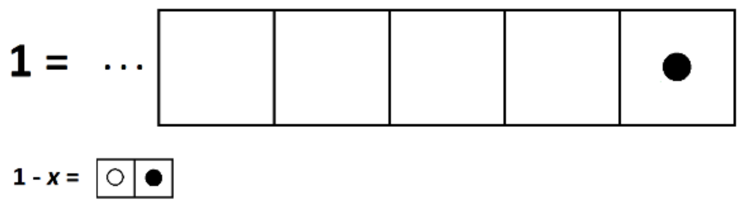
Овај следећи задатак је стварно страва! Саветујем вам да нацртате мало веће кутије када будете цртали слику за примену тачака и кутија. (Број тачака које ће вам бити потребне прилично брзо расте.)

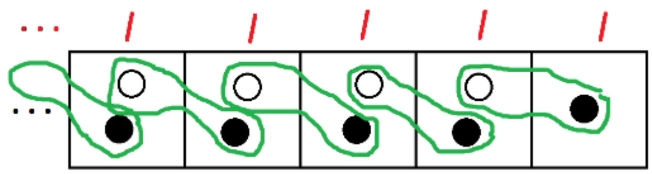
3. Израчунајте $\frac{1}{1-x-x^2}$ и откријте чувени Фибоначијев низ!

НЕОБАВЕЗНО: ДА ЛИ ТРЕБА ДА ВЕРУЈЕМО БЕСКОНАЧНИМ ЗБИРОВИМА?

Формула за геометријски ред гласи овако $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$.

Дошли смо до ње тако што смо кренули од полинома 1 и поделили га полиномом $1-x$. Бесконачни збир степена од x природно се појављује.





Али, да ли ова формула може да буде тачна?

Шта ако је x, рецимо, једнако 2? Онда је према формули за геометријски ред $1+2+4+8+16+\cdots$ једнако $\frac{1}{1-2}$, односно -1. То је потпуно бесмислено!

Са друге стране, ако је $x=0{,}1$, формула за геометријски ред каже да је:

$$\begin{aligned}1+(0{,}1)+(0{,}1)^2+(0{,}1)^3+\cdots &= 1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+\cdots\\ &= 1{,}111\cdots,\end{aligned}$$

исто што и:

$$\frac{1}{1-0{,}1}=\frac{1}{0{,}9}=\frac{10}{9}$$

То је једно цело и једна деветина. У основној школи се учи да је $\frac{1}{9}$ у децималном запису $0{,}111\cdots$ (или потражите објашњење у поглављу 8). Дакле, једна деветина је једнака $1{,}111\cdots$. У овом случају формула за геометријски ред је тачна!

$$1+(0{,}1)+(0{,}1)^2+(0{,}1)^3+\cdots=\frac{1}{1-0{,}1}.$$

Шта се то дешава? Када можемо да верујемо формули, а када не можемо?

АЛГЕБРА НАСПРАМ АРИТМЕТИКЕ

Машина $1\leftarrow 10$ је машина која приказује механичку алгебру. Све што она покаже и све што ми закључимо на основу тога тачно је када се ради о механичкој алгебри.

На пример, формула за геометријски ред каже да је $1+2+4+8+\cdots$ једнако $\frac{1}{1-2}$, што је бесмислено ако га схватимо као аритметички исказ. Међутим, у чисто механичком смислу, без обзира на аритметику, у тој тврдњи постоји нека врста истине. Ево како можемо да разаберемо ту истину.

Ако је $1+2+4+8+\cdots$ једнако $\frac{1}{1-2}$, онда множењем $1+2+4+8+\cdots$ са $1-2$ треба да се добије 1. Да ли је стварно тако?

Заправо јесте!

$$\begin{aligned}(1-2)\cdot(1+2+4+8++\cdots) &= (1-2)+(1-2)\cdot 2+(1-2)\cdot 4+(1-2)\cdot 8+\cdots\\ &= 1-2+2-4+4-8+8-16+\cdots\\ &= 1+0+0+0+\cdots\\ &= 1\end{aligned}$$

Дакле, збир $1+2+4+8+\cdots$ заиста се понаша као $\frac{1}{1-2}$.

Али ипак, ово баш и није задовољавајуће. Желимо да знамо када је једнакост $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$ заиста тачна као аритметички исказ.

ОДГОВОР ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ И ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА (ЗА ХРАБРЕ)

Бесконачни збирови изучавају се на часовима диференцијалног и интегралног рачуна. Тамо ћете, на пример, научити да је $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x}$, као аритметички исказ, тачна једнакост за мале вредности x (прецизније, за све вредности x које су строго између -1 и 1.) Као што смо имали прилике да видимо, формула је тачна за $x=0{,}1$, и није тачна ако је $x=2$.

За оне који су вољни да знају, ево како се то доказује.

Обично дељење полинома показује да је:

$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$, и

$\frac{1-x^3}{1-x}=1+x+x^2$, и

$\frac{1-x^4}{1-x}=1+x+x^2+x^3$, итд.

(Покушајте да докажете наведене једнакости!)

У општем случају, видимо да важи:

$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$.

Када у овој једнакости пустимо да n буде све веће и веће, изгледа да добијамо бесконачни геометријски збир.

$$\begin{array}{ccc}
1+x & = & \dfrac{1-x^2}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2 & = & \dfrac{1-x^3}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2+x^3 & = & \dfrac{1-x^4}{1-x} \\[2ex]
\downarrow & & \downarrow \\[2ex]
1+x+x^2+x^3+\cdots & = & ?
\end{array}$$

Дакле, поставља се питање шта се дешава са количником $\frac{1-x^n}{1-x}$ када n постаје све веће и веће? Ако то питање има одговор, онда ће тај одговор бити вредност збира $1+x+x^2+x^3+\cdots$.

Да ли количник $\frac{1-x^n}{1-x}$ има граничну вредност? Па, зависи од тога да ли x^n има граничну вредност када n постаје све веће и веће или је нема. Дакле, за које вредности од x, његови степени прилазе некој вредности?

Знамо да за степене броја $0{,}1$, на пример, и за степене броја $0{,}83$ и броја $-\frac{1}{2}$, важи да се приближавају нули за све веће и веће вредности степена. Штавише, x^n постаје све ближе и ближе нули како n расте, за произвољну вредност x које је између -1 и 1.

Због тога, за $-1 < x < 1$ важи

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

$$1+x+x^2+x^3 = \frac{1-x^4}{1-x}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

У формулу за геометријски ред као аритметички исказ може се веровати макар за вредности $-1 < x < 1$.

ПОШТЕН ПРИСТУП

Други приступ испитивању формуле геометријског реда изгледа као један смео корак у непознато. Претпоставимо да бесконачни збир $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ има смисла и да има вредност. Означимо ту вредност са S. Онда је:

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ &= 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= 1 + x \cdot S \end{aligned}$$

Одатле се добија да је $S = \frac{1}{1-x}$.

Ово је поштен приступ. Он доказује следеће: <u>*Ако*</u> *бесконачни збир* $1 + x + x^2 + \cdots$*има вредност, онда то мора бити* $\frac{1}{1-x}$. Он уопште не тврди нити оповргава да бесконачни збир има смисла и да има вредност.

Исто важи за приступ који користи тачке и кутије, пошто и он доказује: <u>Ако</u> вам $1 + x + x^2 + \cdots$ има смисла, онда је његов збир $\frac{1}{1-x}$. На вама је да одлучите да ли тај бесконачни збир има смисла. (Диференцијалном и интегралном рачуну се свиђа да каже да има, онда када је $-1 < x < 1$.)

ДРУГИ АРИТМЕТИЧКИ СИСТЕМИ НУДЕ ДРУГА ЗНАЧЕЊА

Исказ $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$ бесмислен је у обичној аритметици. Али, ко каже да морамо да останемо у оквирима обичне аритметике? Постоји ли неки необичан начин да посматрамо ствари?

Тежимо да посматрамо бројеве распоређене на бројевној оси кроз сабирање. Крените један корак на десно од 0 и стићи ћете до 1. Ако се сада померите за два корака, наћи ћете се на месту на ком се налази број 3. Померите се затим за четири корака, стижете до броја 7, итд. Збир $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, са овакве тачке гледишта, одвешће нас дуж бројевне осе бесконачно далеко на десну страну, у односу на број 0.

$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \infty$, у стандардној аритметици. Тај збир није једнак -1.

Али, хајде да размишљамо о бројевима кроз множење. Посебно, пошто нас занима збир $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, хајде да говоримо о чиниоцима и садржаоцима степена броја два.

Е сада, нулаје веома дељив број. То је највдељивији број који постоји. Што се тиче двојки, нула се може поделити са два једном, у ствари два пута, у ствари три пута. Штавише, можете поделити нулу са два колико год пута желите — и и даље наставити са дељењем.

Што се тиче двојки, број осам се у неку руку понаша као нула: можете га поделити са двојком три пута. Али, број 32 још више личи на нулу: можете га поделити са нулом пет пута. А број 2^{100} још више личи на нулу.

Тако је, у овом смислу, 2^{100} број врло близак нули. Број 32 је донекле сличан нули. Број осам је мање сличан. Број један уопште није сличан нули: не може се поделити без остатка чак ни само једном двојком.

У наведеном контексту, може ли $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ бити једнако -1? Дакле:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 &= 3 &&= 4 - 1 \\
1 + 2 + 4 &= 7 &&= 8 - 1 \\
1 + 2 + 4 + 8 &= 16 &&= 16 - 1 \\
&\vdots \\
1 + 2 + \cdots &+ 2^{99} &&= 2^{100} - 1
\end{aligned}
$$

Ови коначни збирови увећавају се док не постану „број близак нули минус један“. Због тога је гранична вредност бесконачног збира $0 - 1 = -1$, управо као што су наши формални аргументи и предвидели да ће се десити.

Дакле, ако аритметику посматрамо кроз множење, $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ је величина која има смисла, и заиста има вредност -1. У овом контексту, формула за геометријски ред има смисла и тачна је за $x = 2$.

Поента је да уз помоћ тачака и кутија добијамо шта морају да буду вредности многих бесконачних збирова, АКО су вам ти бесконачни збирови смислени. На вама је да одлучите у ком аритметичком контексту желите да се играте и да ли су бесконачни збирови које истражујете смислени у том контексту. Уколико јесу, тачке и кутије ће вам рећи колика је вредност њихових збирова!