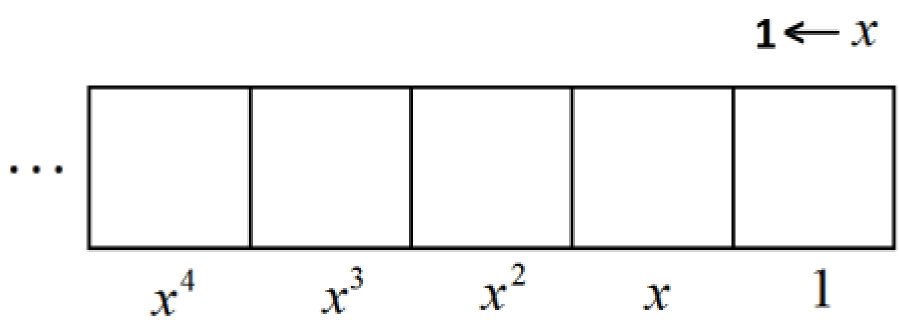
PUNTOS EXPLOSIVOS
CAPITULO 7

SUMAS INFINITAS

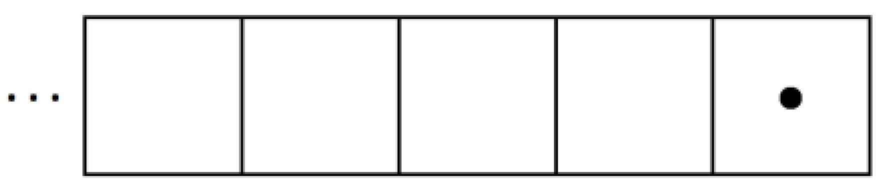
En el capítulo anterior jugamos con la máquina $1 \leftarrow x$ y vimos el poder que tiene dicha máquina para hacer de la álgebra escolar avanzada algo tan natural y directo.

En este capítulo, llevemos ese poder hasta ¡e! Infinito! Y será igual de natural y directo.

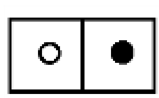
Ten en cuenta otra vez la máquina $1 \leftarrow x$.



Y usemos esta máquina para calcular este extraño problema de división: $\frac{1}{1-x}$. Este es el muy sencillo polinomio 1, que se ve así



dividido por $1-x$, lo cual se ve así, un anti-punto y un punto.



Ves algún par de punto-y-anti-punto en el dibujo de sólo 1? ¡No!

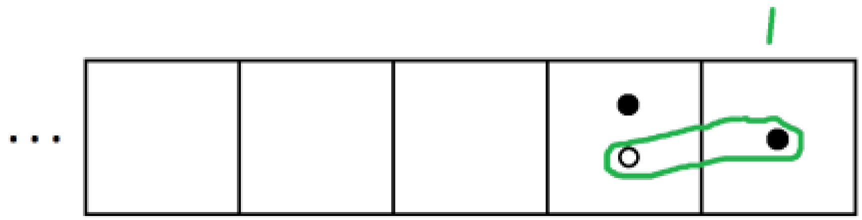
Pero recuerda

Si hay algo que quieres en tu vida, ¡hazlo realidad! (Y lidia con las consecuencias.)

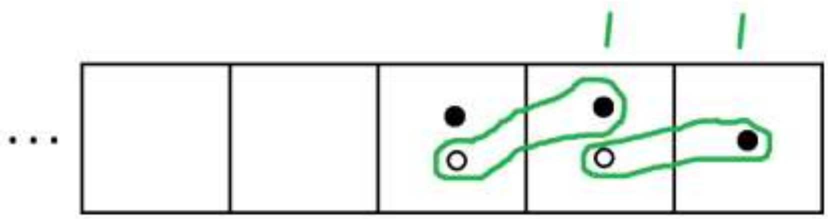
¿Podemos hacer que aparezcan en el dibujo pares de punto-anti-punto? No sería bueno tener un anti-punto a la izquierda del punto que tenemos?

Bueno, ¡hagámoslo realidad!

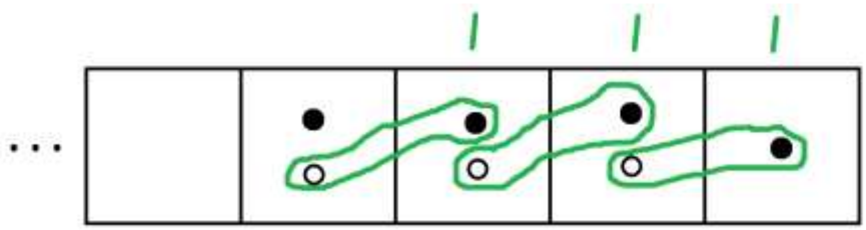
Y para mantener esa casilla vacía técnicamente debemos también agregar un punto. Esto nos da una copia de lo que queremos.



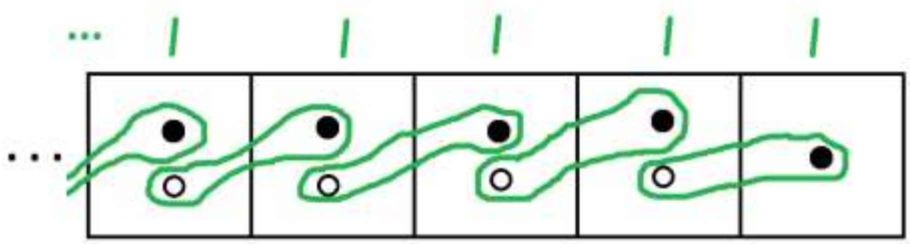
Y podemos hacerlo una vez más.



Y otra vez.



De hecho, podemos ver que estaríamos haciendo esto ¡por siempre!



¡Woa!

¿Cómo leer esta respuesta?

Bueno, tenemos un 1, y una x, y una x^2, y una x^3, y así sucesivamente. Tenemos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots.$$

La respuesta es una suma infinita.

La ecuación que obtenemos es una fórmula matemática muy famosa. Se le llama la *fórmula de series geométricas* y con frecuencia se le da a los estudiantes en muchos libros de final de secundaria. Sólo que muchos libros de texto escriben la fórmula al revés, y con la letra r en lugar de la letra x.

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

En una clase de cálculo, uno podría decir que acabamos de calcular la serie de Taylor de la función racional $\frac{1}{1-x}$. ¡Eso suena de terror! Pero el trabajo que hicimos con puntos-y-casillas muestra que no es para nada de terror. ¡De hecho es divertido!

He aquí algunas preguntas para que pruebes si quieres. (¡Y cada pregunta dice cual debe ser la respuesta!)

1. Usa puntos-y-casillas para demostrar que $\frac{1}{1+x}$ es igual a $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$.

2. Computa $\frac{x}{1-x^2}$. ¿Obtienes la suma de potencias impares de x?

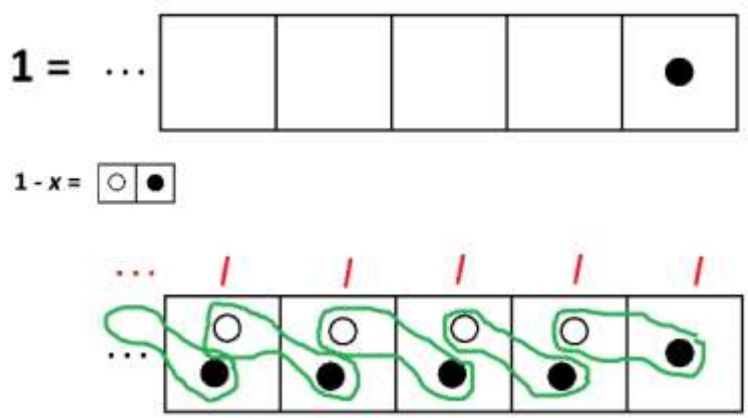
¡Esta próxima pregunta es súper cool! Te aconsejo que dibujes casillas bien grandes cuando hagas tu dibujo de puntos y casillas. (El número de puntos incrementa rápidamente.)

3. Computa $\frac{1}{1-x-x^2}$ y ¡descubre la famosa sucesión de Fibonacci!

OPCIONAL: ¿DEBEMOS CREER EN LAS SUMAS INFINITAS?

La fórmula de la serie geométrica es $1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$.

Esto lo vimos al tomar el polinomio 1 y dividirlo por el polinomio $1-x$. Naturalmente aparece la suma infinita de potencias de x .



Pero ¿puede ser cierta esta fórmula?

¿Qué tal si x es, digamos, el número 2 ? Entonces la fórmula de la serie geométrica dice que $1+2+4+8+16+\cdots$ equivale a $\dfrac{1}{1-2}$, lo cual es -1. ¡Eso es absurdo!

Por otro lado si $x=0.1$, entonces la fórmula de la serie geométrica dice que

$$\begin{aligned}1+(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots &= 1+0.1+0.01+0.001+\cdots \\ &= 1.111...\end{aligned}$$

equivale a

$$\frac{1}{1-0.1}=\frac{1}{0.9}=\frac{10}{9} .$$

Eso es uno y un noveno. En primaria aprendimos que $\dfrac{1}{9}$ como decimal es $0.111...$ (o mira el capítulo 8). Entonces uno-y-un-noveno equivale a $1.111...$. ¡En este caso la fórmula de la serie geométrica acierta!

$$1+(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots=\frac{1}{1-0.1} .$$

¿Qué está pasando aquí? ¿Cuándo podemos y cuándo no podemos creer en la fórmula?

ALGEBRA VERSUS ARITMETICA

La máquina $1 \leftarrow x$ es una máquina que muestra álgebra mecánica. Todo lo que hace y todo lo que concluimos a partir de ella es acertado en términos de álgebra mecánica.

Por ejemplo, la fórmula de la serie geométrica dice que $1+2+4+8+\cdots$ equivale a $\frac{1}{1-2}$, lo cual es absurdo como enunciado aritmético. Sin embargo, en un sentido puramente mecánico, sin tomar en cuenta la aritmética, hay una versión de la verdad en esta afirmación. Así es como podemos ver algo de esa verdad.

> Si $1+2+4+8+\cdots$ equivale a $\frac{1}{1-2}$, entonces la multiplicación de $1+2+4+8+\cdots$ por $1-2$ debería dar 1. ¿Es así?
>
> ¡Sí lo es!
>
> $$\begin{aligned}(1-2)\times(1+2+4+8+\cdots) &= (1-2)+(1-2)\times 2+(1-2)\times 4+(1-2)\times 8+\cdots \\ &= 1-2+2-4+4-8+8-16+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots \\ &= 1.\end{aligned}$$
>
> Por tanto $1+2+4+8+\cdots$ sí se comparta realmente como $\frac{1}{1-2}$.

Aún así, esto no es muy satisfactorio. Queremos saber cuándo $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$ es realmente acertado como enunciado aritmético.

LA RESPUESTA EN BASE A CALCULO (PARA LOS VALIENTES)

Las sumas infinitas se estudian en la clase de cálculo. Ahí aprendes, por ejemplo, que $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$ es cierto como enunciado para valores pequeños de x (específicamente, para todos los valores de x estrictamente entre -1 y 1.) La fórmula es válida para $x=0.1$, como ya vimos, y no para $x=2$.

Para aquellos que quieran seguir en el juego, así es como va el argumento según el cálculo.

La división de polinomios normal muestra que $\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x$ y $\dfrac{1-x^3}{1-x}=1+x+x^2$ y $\dfrac{1-x^4}{1-x}=1+x+x^2+x^3$, y así sucesivamente. (¡Inténtalos!) En general, vemos que $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$.

Ahora al dejar crecer y crecer a n pareciera que nos va dando la suma geométrica infinita.

$$\begin{array}{ccc}
1+x & = & \dfrac{1-x^2}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2 & = & \dfrac{1-x^3}{1-x} \\[2ex]
1+x+x^2+x^3 & = & \dfrac{1-x^4}{1-x} \\[2ex]
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\[2ex]
1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \textbf{?}
\end{array}$$

La pregunta entonces es: ¿Hacia dónde va $\dfrac{1-x^n}{1-x}$ a medida que n se hace más y más grande? ¿Existe una respuesta a esta pregunta, pues sería el valor de $1+x+x^2+x^3+\cdots$.

¿Tiene $\dfrac{1-x^n}{1-x}$ un valor límite? Bueno, eso depende de si x^n tiene un valor límite a medida que n crece. ¿Entonces para cuáles valores de x se aproximan a un valor sus potencias?

Sabemos que las potencias de 0.1, por ejemplo, y de 0.83 y de $-\dfrac{1}{2}$, todas se aproximan a cero para potencias más y más grandes. De hecho, x^n se acerca cada vez más a cero a medida que n crece para cualquier valor de x entre -1 y 1.

Entonces para $-1 < x < 1$, tenemos que

$$\begin{array}{ccc} 1+x & = & \dfrac{1-x^2}{1-x} \\[2ex] 1+x+x^2 & = & \dfrac{1-x^3}{1-x} \\[2ex] 1+x+x^2+x^3 & = & \dfrac{1-x^4}{1-x} \\[2ex] \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\[2ex] 1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \dfrac{1-0}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

Al menos para $-1 < x < 1$, se puede creer en la fórmula de la serie geométrica como enunciado aritmético.

EL METODO HONESTO

Otra manera de examinar la fórmula de la serie geométrica es dando un salto de fe. Asumamos que la suma infinita $1+x+x^2+x^3+\cdots$ tiene sentido y respuesta. Llamemos la respuesta S. Entonces

$$\begin{aligned} S &= 1+x+x^2+x^3+\cdots \\ &= 1+x\left(1+x+x^2+\cdots\right) \\ &= 1+xS \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $S = \dfrac{1}{1-x}$.

Este es un método honesto. Prueba que: *SI la suma infinita* $1+x+x^2+\cdots$ *tiene respuesta, entonces esa respuesta debe ser* $\dfrac{1}{1-x}$. No hace ninguna afirmación a priori acerca de si la suma infinita tiene o no sentido y respuesta.

Lo mismo es cierto sobre el método de puntos-y-casillas pues también prueba que: SI $1+x+x^2+x^3+\cdots$ te hace sentido, entonces la respuesta es $\frac{1}{1-x}$. Depende de ti decidir si esta suma infinita hace sentido. (En cálculo gusta decir que lo tiene si $-1<x<1$.)

OTROS SISTEMAS DE ARITMETICA OFRECEN OTROS SIGNIFICADOS

El anunciado $1+2+4+8+\cdots=-1$ no hace sentido en la aritmética ordinaria. ¿Pero quién dice que tenemos que quedarnos con la aritmética ordinaria? ¿Existe alguna manera extraordinaria de ver el asunto?

Tendemos a ver los números espaciados sobre la línea de números en forma aditiva. Caminamos un espacio hacia la derecha de 0 y terminamos en la posición 1. Ahora le sumamos dos pasos y terminamos en la posición 3. Ahora le sumamos cuatro pasos, posición 7. Y así sucesivamente. La suma $1+2+4+8+\cdots$, desde esta perspectiva, nos lleva infinitamente hacia la derecha de 0 sobre la línea de números.

En aritmética ordinaria $1+2+4+8+\cdots=\infty$ no equivale a -1.

Pero pensemos en los números multiplicativamente. En particular ya que nos estamos enfocando en la suma $1+2+4+8+\cdots$ pensemos en factores y múltiplos de potencias de dos.

Ahora bien 0 es un número altamente divisible. Es el número más divisible de todos. Respecto a dos se le puede dividir por 2 una vez, de hecho dos veces, de hecho tres veces. De hecho podemos dividir 0 por dos tantas veces queramos—y todavía seguir dividiendo.

Con respecto a dos, el número 8 se parece un poco al cero: lo podemos dividir por dos tres veces. Pero 32 es aún más parecido al cero: lo podemos dividir por dos cinco veces. Y 2^{100} es aún más como el cero.

Por lo que en ese sentido, 2^{100} es un número muy cercano al 0. El número 32 es algo cercano al 0. El número 8 es menos cercano. El número 1 no es para nada cercano al cero: no lo podemos dividir uniformemente entre dos ni siquiera una vez.

Entonces, en este contexto, ¿puede $1+2+4+8+\cdots$ ser -1?

Bueno

$$
\begin{aligned}
&1+2=3 &&=4-1\\
&1+2+4=7 &&=8-1\\
&1+2+4+8=15 &&=16-1\\
&\vdots\\
&1+2+\cdots+2^{99} &&=2^{100}-1
\end{aligned}
$$

Estas sumas finitas crecen y se convierten en "un número muy cercano a cero, menos uno." En el límite, la suma infinita tiene un valor de $0-1=-1$, tal como nuestro enunciado formal dijo que sería.

Entonces en el marco de la aritmética multiplicativa, $1+2+4+8+\cdots$ es una cantidad con significado, y si tiene valor -1. En este contexto, la fórmula de serie geométrica hace sentido y es correcta para $x=2$.

El punto aquí es que nuestro trabajo con puntos-y-casillas da las respuestas a muchas sumas infinitas, SIEMPRE Y CUANDO la suma infinita tenga significado para ti. Por lo tanto depende de ti decidir en cuál contexto aritmético quieres jugar y la suma infinita que estás examinando tiene sentido en ese contexto. Si lo tiene, entonces ¡puntos y casillas te dan la respuesta!