PUNTOS EXPLOSIVOS
CAPITULO 8

DECIMALES

Hasta ahora todas nuestras máquinas han tenido casillas que se extienden hacia la izquierda tan lejos como hemos querido. ¡Pero eso aparenta estar muy fuera de equilibrio! ¿Por qué no también tener casillas que se extienden infinitamente hacia la derecha?

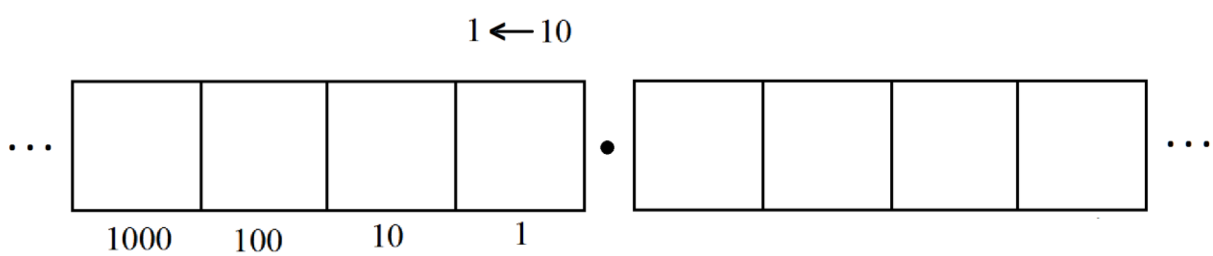
A los matemáticos les gusta la simetría, por lo tanto sigamos el ejemplo y emparejemos a todas nuestras máquinas. Pongamos casillas hacia la izquierda y hacia la derecha.

El reto ahora es entender qué significado tienen esas casillas hacia la derecha.

DESCUBRIENDO LOS DECIMALES

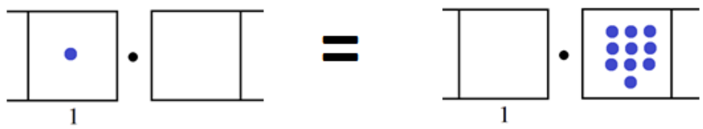
Vamos de vuelta a trabajar con las máquinas $1 \leftarrow 10$ y veamos qué pudieran significar las casillas de la derecha. (Así también debiéramos poder entender lo que significan en cualquier otra máquina).

Para diferenciar visiblemente las casillas de la izquierda y la derecha, las separaremos con un punto. (La sociedad llama a este punto, al menos para una máquina $1 \leftarrow 10$, un *punto decimal*.)

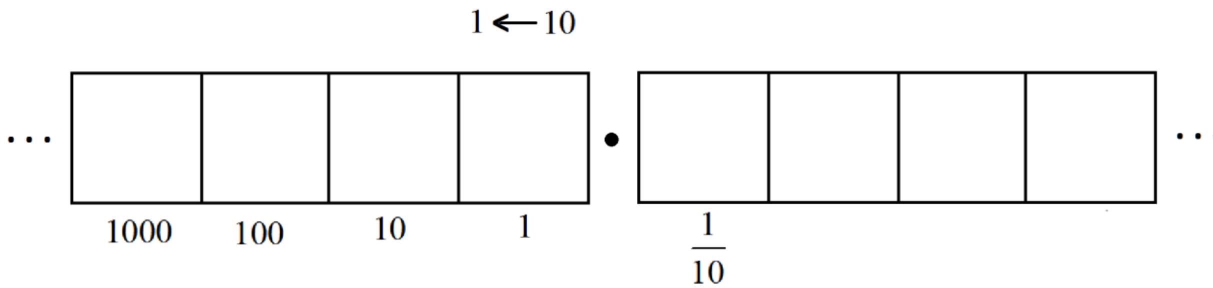


Entonces, ¿qué significan los puntos en las casillas de la derecha? ¿Cuáles son los valores de los puntos en esas casillas?

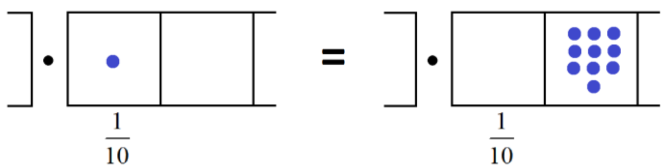
Como ésta es una máquina $1 \leftarrow 10$, sabemos que diez puntos en cualquier casilla explotan para formar un punto un lugar a la izquierda. Entonces diez puntos en la casilla justo a la derecha del punto decimal equivale a un punto en la casilla de los 1s. Cada punto en esa casilla debe valer una décima.



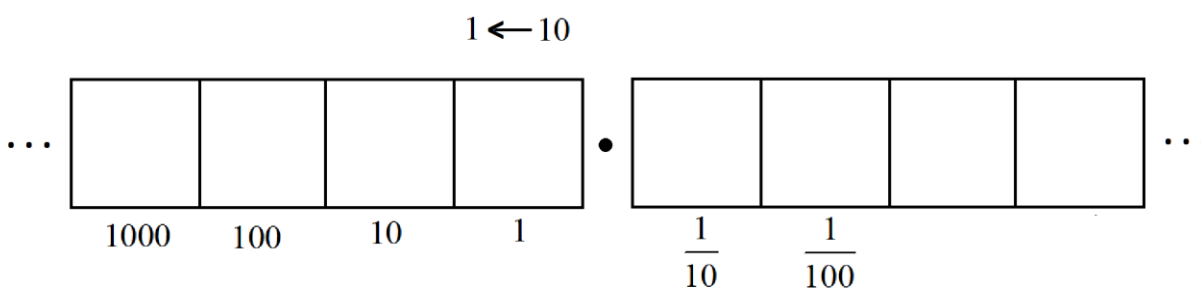
Tenemos nuestro primer valor posicional hacia la derecha del punto decimal.



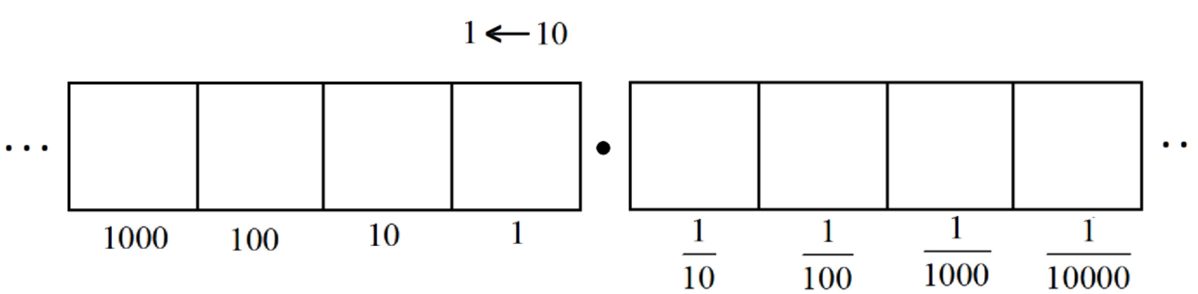
De la misma manera, diez puntos en la siguiente casilla valen una décima. Por lo que cada punto en esa siguiente casilla ha de valer una centésima.



Ahora tenemos dos valores posicionales hacia la derecha del punto decimal.



Y diez milésimas hacen una centésima, y diez diezmilésimas hacen una milésima, y así sucesivamente.

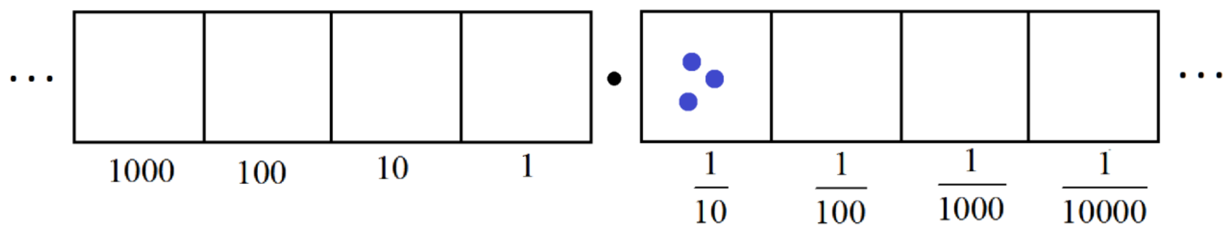


Vemos que las casillas hacia la izquierda del punto decimal representan valores posicionales determinadas por potencias de diez, y las casillas a la derecha del punto decimal representan valores posicionales determinados por los recíprocos de potencias de diez.

!Acabamos de descubrir los decimales!

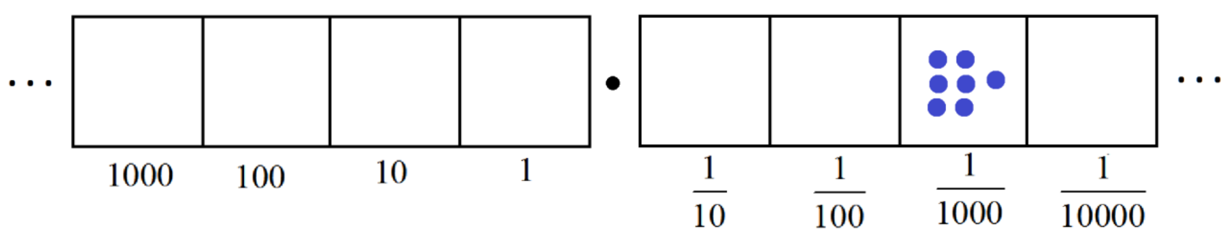
Pregunta: ¿Qué significa el prefijo *deci* en Castellano? ¿Se pudiera hablar de "decimales" en una máquina $1 \leftarrow 2$, por ejemplo? (¿Y por qué Diciembre no es el mes diez del año? ¿Qué pasó a lo largo de la historia del calendario occidental?).

Cuando la gente escribe 0.3, por ejemplo, en base diez, se refieren al valor de colocar tres puntos en la primera casilla después del punto decimal.



Vemos que 0.3 equivale a tres décimas: $0.3 = \frac{3}{10}$.

Siete puntos en la tercera casilla después del punto decimal son siete milésimas: $0.007 = \frac{7}{1000}$.

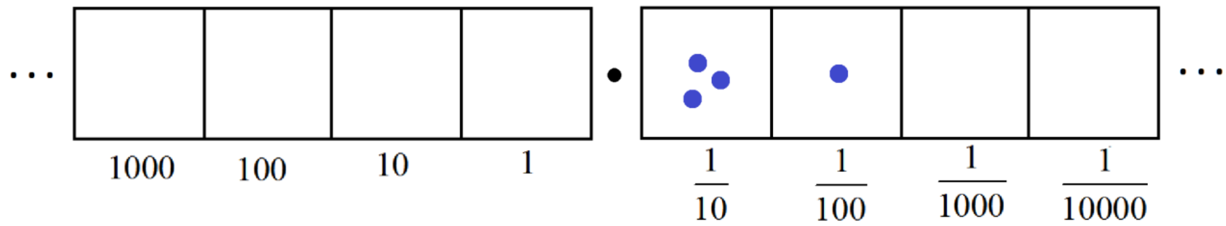


Comentario: Algunas personas omiten el primer cero y sólo escriben $.007 = \frac{7}{1000}$. Es sólo cuestión de gusto personal.

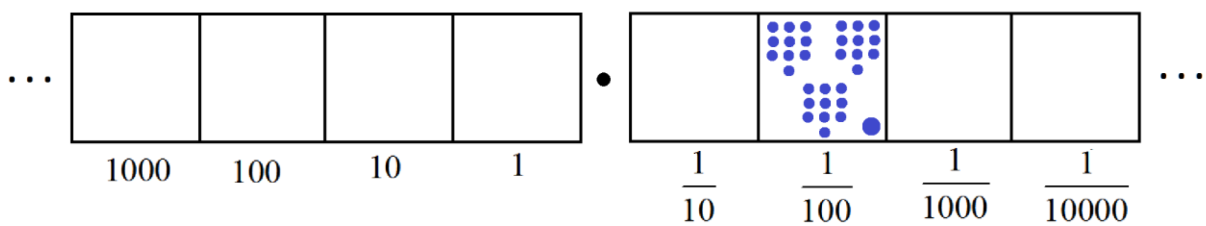
Aquí va una pregunta. He incluido mi respuesta a ella, y las respuestas a todas las otras preguntas esparcidas a lo largo de este capítulo, al final de esta lección.

1. Algunas personas leen 0.6 en voz alta como "punto seis" y otras lo leen en voz alta como "seis décimas." ¿Cuál es más útil para entender este número verdaderamente?

Existe una posible fuente de confusión con un decimal como el 0.31. Este es técnicamente tres décimas y una centésima: $0.31 = \frac{3}{10} + \frac{1}{100}$.



Pero algunas personas leen 0.31 en voz alta como “treinta y un centésimas,” lo cual se ve así.



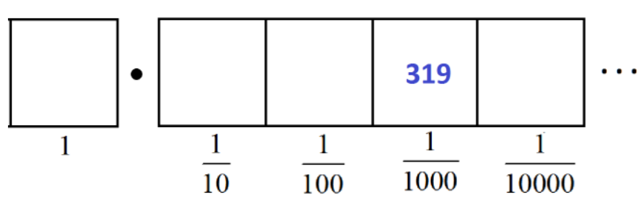
¿Son lo mismo?

Bueno, ¡Si! Con tres explosiones vemos que treinta y un centésimas se convierten en tres décimas y una centésima.

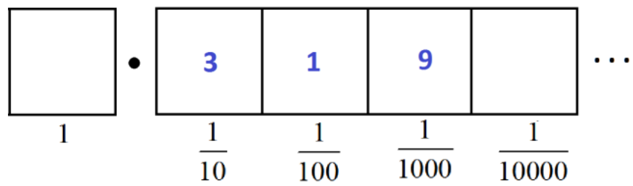
Comentario: También pueden demostrar que $\frac{3}{10} + \frac{1}{100}$ y $\frac{31}{100}$ son iguales usando adición de fracciones. Tenemos que $\frac{3}{10} + \frac{1}{100} = \frac{30}{100} + \frac{1}{100} = \frac{31}{100}$. (¿Pueden ver que este es realmente el resultado de ejecutar tres explosiones en el dibujo de $\frac{3}{10} + \frac{1}{100}$?)

2. Un maestro pidió a sus estudiantes que dibujen la fracción $\frac{319}{1000}$ en una máquina $1 \leftarrow 10$.

JinJin dibujó:



Subra dibujó:



El maestro calificó como correctos a ambos. ¿Son realmente válidas las dos soluciones? Expliquen su razonamiento. (De paso, al maestro le da igual si los estudiantes simplemente escriben los números en lugar de dibujar puntos).

3. ¡Selección múltiple!

a) El decimal 0.23 equivale a: (A) $\frac{23}{10}$ (B) $\frac{23}{100}$ (C) $\frac{23}{1000}$ (D) $\frac{23}{10000}$?

b) El decimal 0.0409 equivale a: (A) $\frac{409}{100}$ (B) $\frac{409}{1000}$ (C) $\frac{409}{10000}$ (D) $\frac{409}{100000}$?

FRACCIONES SIMPLES COMO DECIMALES

Algunos decimales dan fracciones que pueden simplificarse aún más. Por ejemplo,

$$0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

y

$$0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

A la inversa, si una fracción se puede re-escribir de manera que contenga un denominador que es una potencia de diez, entonces lo podemos escribir fácilmente como un decimal. Por ejemplo,

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \text{ por lo tanto } \frac{3}{5} = 0.6$$

y

$$\frac{13}{20} = \frac{13 \times 5}{20 \times 5} = \frac{65}{100} = 0.65.$$

He aquí algunos problemas más. Hagan aquellos que les parezcan más interesantes.

4. ¿Qué fracciones (en su forma más simplificada) representan los siguientes decimales?

$0.05 \qquad 0.2 \qquad 0.8 \qquad 0.004$

5. Escriban cada una de las siguientes fracciones como decimales.

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{1}{25} \qquad \frac{1}{20} \qquad \frac{1}{200} \qquad \frac{2}{2500}$$

6. ¡SELECCIÓN MULTIPLE!

a) El decimal 0.050 equivale a (A) $\frac{50}{100}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{200}$ (D) Ninguna de las anteriores?

b) El decimal 0.000208 equivale a (A) $\frac{52}{250}$ (B) $\frac{52}{2500}$ (C) $\frac{52}{25000}$ (D) $\frac{52}{250000}$?

7. Escriban cada una de las siguientes fracciones como decimales.

$$\frac{7}{20} \qquad \frac{16}{25} \qquad \frac{301}{500} \qquad \frac{17}{50} \qquad \frac{3}{4}$$

8. Reto

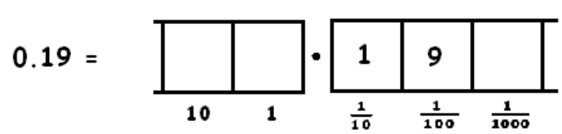
a) ¿Qué fracción representa el decimal 2.3?

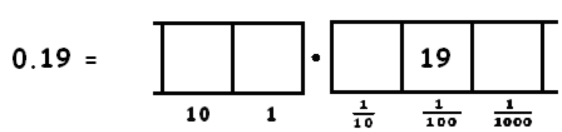
b) ¿Qué fracción representa el decimal 17.04 ?

c) ¿Qué fracción representa el decimal 1003.1003 ?

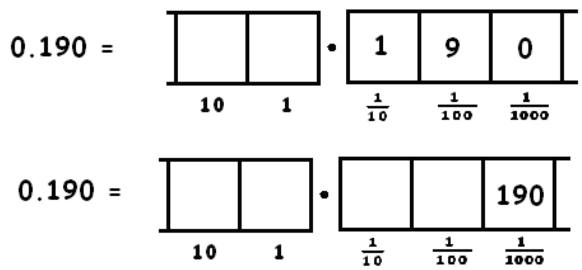
9. Exploremos la pregunta: ¿Representan 0.19 y 0.190 el mismo número o números diferentes?

He aquí dos dibujos de puntos y casillas para el decimal 0.19:





He aquí dos dibujos de puntos y casillas para el decimal 0.190



a) Expliquen cómo una “des-explosión” establece que el primer dibujo de 0.19 es equivalente al segundo dibujo de 0.19 .
b) Expliquen cómo algunas des-explosiones establecen que el primer dibujo de 0.190 es equivalente al segundo dibujo de 0.190 .
c) Expliquen cómo con explosiones y des-explosiones se establece que de hecho los cuatro dibujos son equivalentes.
d) En conclusión: ¿ 0.190 representa al mismo número 0.19 ?

Para un matemático, las expresiones 0.19 y 0.190 representan exactamente la misma cantidad numérica. Pero habrán notado en clases de ciencia que con frecuencia los científicos al anotar sus mediciones escriben lo que aparentan ser ceros innecesarios. Esto se debe a que los científicos desean impartir al lector más información además de un valor numérico.

Por ejemplo, supongan que un botánico mide el largo de un tallo. Al escribir en su publicación la medida 0.190 metros el científico está diciéndole al lector que midió el largo del tallo hasta la milésima de metro más cercana y que obtuvo 1 décima, 9 centésimas, y 0 milésimas de metro. Por tanto nos están diciendo que el largo real del tallo está entre 0.1895 y 0.1905 metros.

Si en lugar de eso hubiese escrito en su publicación simplemente 0.19 metros, entonces tendríamos que asumir que sólo midió el largo del tallo hasta la centésima de metro más cercana y que el largo real del tallo está entre 0.185 y 0.195 metros.

NUMEROS MIXTOS COMO DECIMALES

¿Cómo se ve $12\frac{3}{4}$, por ejemplo, como decimal?

Bueno, $12\frac{3}{4} = 12 + \frac{3}{4}$ Y ciertamente podemos escribir la parte fraccional como un decimal. (¡La parte no fraccional ya está en formato de máquina $1 \leftarrow 10$!). Tenemos que

$$12\frac{3}{4} = 12 + \frac{75}{100}$$

y vemos que

$$12\frac{3}{4} = 12.75 .$$

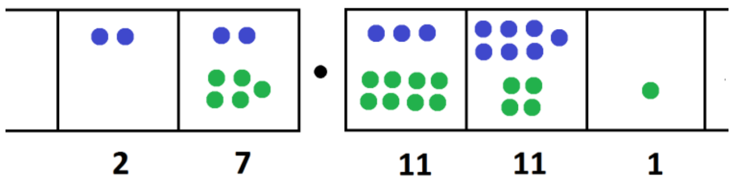
10. Escriban cada uno de los siguientes números en forma decimal.

$$5\frac{3}{10} \qquad 7\frac{1}{5} \qquad 13\frac{1}{2} \qquad 106\frac{3}{20} \qquad \frac{78}{25} \qquad \frac{9}{4} \qquad \frac{131}{40}$$

ADICION Y SUSTRACCION DE DECIMALES

La ejecución de adiciones y sustracciones con decimales en una máquina $1 \leftarrow 10$ no es distinta que la ejecución de adiciones y sustracciones sin decimales en una máquina $1 \leftarrow 10$.

Por ejemplo, he aquí un dibujo de $22.37 + 5.841$.

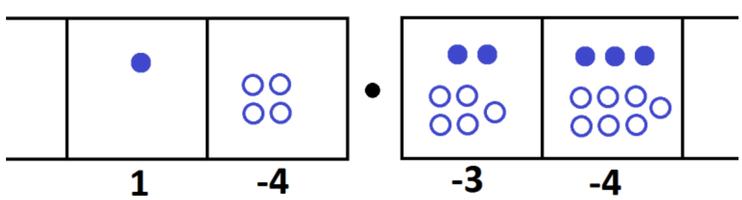


Vemos la respuesta $2\,|\,7\,.\,11\,|\,11\,|\,1$. ¡Sólo sumen de izquierda a derecha y no se preocupen de las explosiones!

$$
\begin{array}{rl}
 & 22.3\ \ 7 \\
+ & \ \ 5.8\ \ 4\ \ 1 \\
\hline
 & 2|7.11|11|1
\end{array}
$$

Con las explosiones obtenemos una respuesta que la sociedad entiende. Obtenemos 28.211. (¡Revísenlo!)

Y aquí está $10.23 - 4.57$.



Luego de varias aniquilaciones, vemos la respuesta $1\,|\,-4\,.\,-3\,|\,-4$. (¿Lo ven?)

$$
\begin{array}{rl}
 & 10.23 \\
- & \ \ 4.57 \\
\hline
 & 1|-4.-3|-4
\end{array}
$$

Ahora, con algunas des-explosiones podemos arreglar esta respuesta para que la sociedad la lea. Obtenemos $10.23-4.57=5.66$. (Revisen que van entendiendo)

$$
\begin{array}{rl}
 & 1\ 0\ .\ 2\ 3 \\
- & \underline{\quad 4\ .\ 5\ 7} \\
 & \cancel{1}\,|{-4}\ .{-3}\,|{-4} \\
 & \cancel{6}\ .{-3}\,|{-4} \\
 & 5\ .\ \cancel{7}\,|{-4} \\
 & 5\ .\ 6\ |\ 6
\end{array}
$$

He aquí algunas preguntas de práctica que quizás quieran o no hacer.

11. ¿Qué da $0.05+0.006$?
¿Qué da $0.05-0.006$?
¿Pueden ver la respuesta con puntos-y-casillas?

12. Agatha dice que calcular $0.0348+0.0057$ es esencialmente lo mismo que calcular $348+57$ en números enteros. ¿Están de acuerdo?

Percy dice que calcular $0.0852+0.037$ es esencialmente lo mismo que calcular $852+37$ en números enteros. ¿Están de acuerdo?

MULTIPLICACION Y DIVISION DE DECIMALES

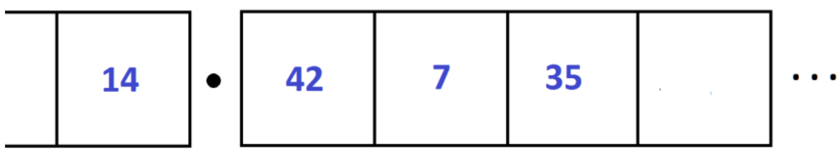
A pesar de que la adición y sustracción de decimales en máquinas $1 \leftarrow 10$ es sencilla, ejecutar multiplicaciones y divisiones en ellas puede ser incómodo. El problema está en que la máquina $1 \leftarrow 10$ se basa en números enteros, no en números parciales, y por eso es complicado hacer sentido de los dibujos. Sin embargo y a pesar de ello, siempre hay maneras de jugar con puntos-y-casillas.

MULTIPLICACION

Definitivamente podemos hacer algo de multiplicación simple. Por ejemplo, un dibujo de puntos y casillas muestra que

$$2.615 \times 7$$

equivale a $14.\ 42 \mid 7 \mid 35$.

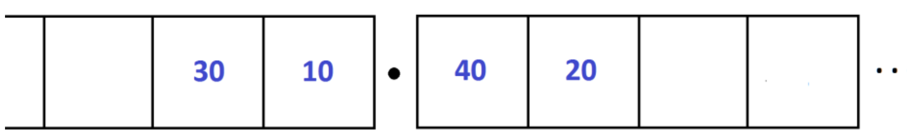


Con explosiones, esto se convierte en 18.305. (¡Revísenlo!)

También podemos explicar una regla que se les enseña a memorizar a los estudiantes:

Para multiplicar un decimal por 10, simplemente corre el punto un puesto hacia la derecha.

Por ejemplo, 31.42×10 da $30 \mid 10\ .\ 40 \mid 20$. Con explosiones, eso se transforma en 314.20 y en la respuesta pareciera que simplemente corrimos el punto decimal. (La mayoría de la gente omite el último cero.)



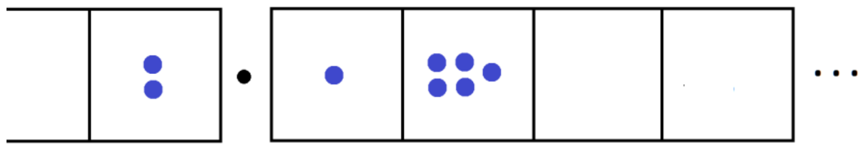
De paso, si multiplican por diez un número un poco más grande que 31, deberían obtener un número un poco más grande que 310. Memorizar en cuál dirección se debe correr el punto decimal es innecesario.

13. ¿Expliquen por qué multiplicar un decimal por 100 tiene el mismo efecto que correr el punto decimal dos puestos? (¿Se les hace necesario memorizar la dirección del cambio?)

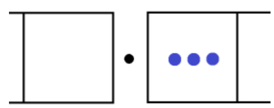
También podemos multiplicar decimales por decimales, pero el trabajo ahora se hace menos divertido. Tenemos que continuar con el mismo método utilizado en el capítulo 3 cuando exploramos la multiplicación larga.

Hagamos un ejemplo. Consideren 2.15×0.3.

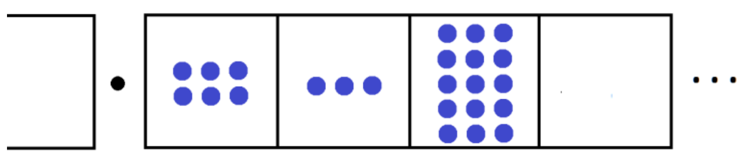
Aquí está como se ve 2.15.



Aquí está como se ve 0.3: es tres puntos a la derecha de donde iría un punto para el número 1.



Entonces para calcular 2.15×0.3 debemos reemplazar cada punto que aparece en el dibujo 2.15 con tres puntos a la derecha de donde ese punto debería estar. Al hacerlo nos da el siguiente dibujo.



Vemos la respuesta $0.6\,|\,3\,|\,15$, o 0.645 luego de una explosión.

Entonces la multiplicación de decimales se puede hacer, pero es incómoda. De hecho es más fácil, en la práctica, volver a la aritmética básica y trabajar con decimales como fracciones. Por ejemplo,

$$0.2 \times 0.4 = \frac{2}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{100} = 0.08$$

y

$$0.05 \times 0.006 = \frac{5}{100} \times \frac{6}{1000} = \frac{30}{100000} = \frac{3}{10000} = 0.0003$$

y

$$2.15 \times 0.3 = \left(2 + \frac{15}{100}\right) \times \frac{3}{10} = \frac{6}{10} + \frac{45}{1000} = 0.6 + 0.045 = 0.645.$$

También vemos el efecto de multiplicar un decimal por diez. Por ejemplo

$$10 \times 3.142 = 10 \times \left(3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000}\right) = 30 + 1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} = 31.42 .$$

14. Calculen 0.04×0.5 y calculen 1000×0.0385.

DIVISION

Consideren $0.08 \div 0.005$.

Para resolver este problema pudiera tratar de dibujar 0.08 en una máquina $1 \leftarrow 10$ y darle sentido a buscar en el dibujo grupos de 0.005, es decir grupos de cinco puntos en tres puestos a la derecha de donde debieran estar. Aunque es factible, se me hace difícil llevar el hilo en la mente y ¡me da dolor de cerebro!

Aquí va un consejo de matemático: **Eviten el trabajo arduo!** ¡De hecho, los matemáticos se esfuerzan mucho para evitar trabajar arduamente!

Ya que convertir los decimales en fracciones hace que su multiplicación sea más fácil, hagamos lo mismo con la división.

He aquí algunos ejemplos.

Ejemplo: Examinen $0.08 \div 0.005$.

Una fracción es el número que resulta de un problema de división. Y, recíprocamente, podemos pensar en un problema de división como una fracción. Por ejemplo, la cantidad $0.08 \div 0.005$ realmente es esta "fracción"

$$\frac{0.08}{0.005}.$$

(Están permitidos los números no enteros como numeradores y denominadores de fracciones.)

Para que esta fracción se vea más amigable, multiplicamos abajo y arriba por factores de diez.

$$\frac{0.08 \times 10 \times 10 \times 10}{0.005 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{80}{5}$$

El problema de división $\frac{80}{5}$ es más amigable. Su solución es 16. (¡Ahora si quieren usen una máquina $1 \leftarrow 10$ para calcularlo!)

Ejemplo: Examinen $\frac{8.5}{100}$.

Dividir por 100 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{100}$. Entonces, $\frac{8.5}{100}$, por ejemplo, puede pensarse como

$$\frac{1}{100}\times 8.5=\frac{1}{100}\left(8+\frac{5}{10}\right)=\frac{8}{100}+\frac{5}{1000}=0.085.$$

Por supuesto, también podemos pensarlo como $\frac{8.5\times 10}{100\times 10}=\frac{85}{1000}$, lo cual parece más directo. (¡Todos los caminos correctos son buenos y certeros en las matemáticas!)

Ejemplo: Examinen $1.51\div 0.07$.

Se me pidieran que calcule $1.51\div 0.07$, yo personalmente resolvería en su lugar el siguiente problema:

$$\frac{1.51\times 10\times 10}{0.07\times 10\times 10}=\frac{151}{7}.$$

Puedo ver la respuesta $21\frac{4}{7}$. Si la misma persona me pide que de la respuesta como decimal, entonces tendría que convertir $\frac{4}{7}$ a decimal. Y eso es posible. ¡La próxima sección explica cómo!

15. *Explique por qué la respuesta a* $0.9\div 10$ *ha de ser* 0.09.
Expliquen por qué la respuesta a $2.34\div 1000$ *ha de ser* 0.00234.
Expliquen por qué la respuesta a 40.04×0.01 *ha de ser* $.4004$.

16. *Calculen* $\frac{0.75}{25}$.

17. *Recapitulemos. He aquí algunos cálculos incómodos. ¿Quieren intentar evaluarlos?*

a) $0.3\times(5.37-2.07)$

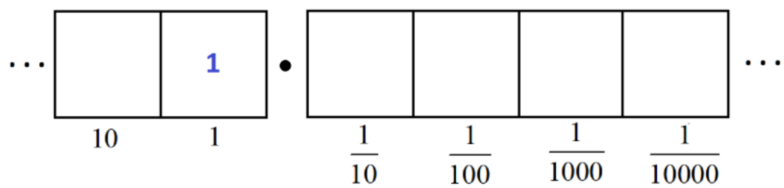
b) $\dfrac{0.1+(1.01-0.1)}{0.11+0.09}$

c) $\dfrac{(0.002+0.2\times 2.02)(2.2-0.22)}{2.22-0.22}$

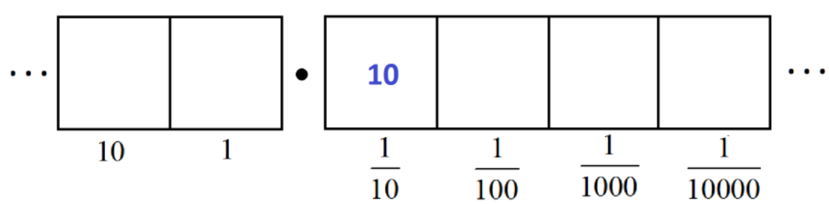
CONVERTIR FRACCIONES EN DECIMALES

Una fracción es la respuesta a un problema de división. Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{8}$ es el resultado de dividir 1 por 8. Y podemos calcular $1 \div 8$ en una máquina $1 \leftarrow 10$ haciendo uso de los decimales. El método es el mismo que el de la división sin decimales.

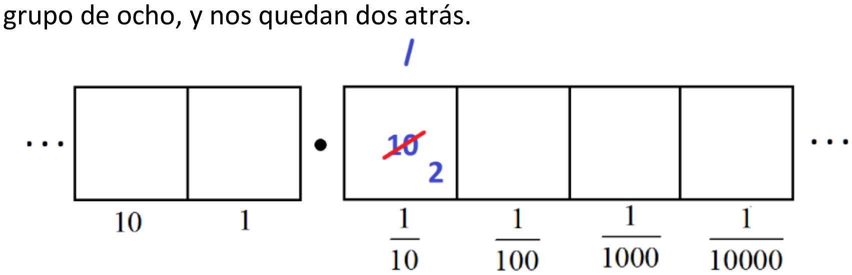
Para $1 \div 8$ buscamos grupos de ocho en el siguiente dibujo.



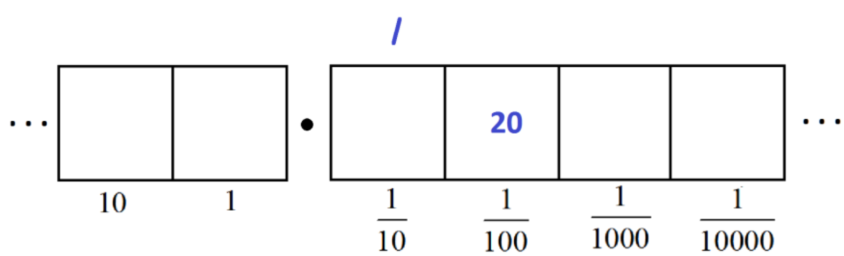
Ninguno a la vista de inmediato, así que hagamos des-explosiones.



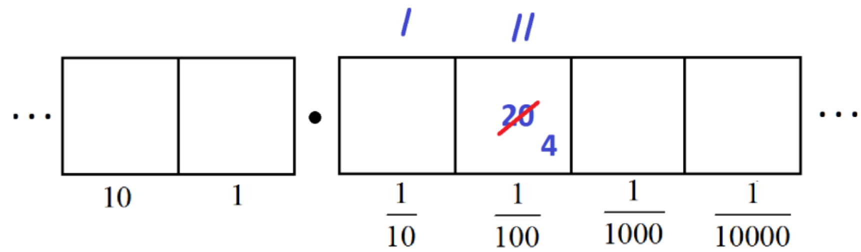
Obtenemos un grupo de ocho, y nos quedan dos atrás.



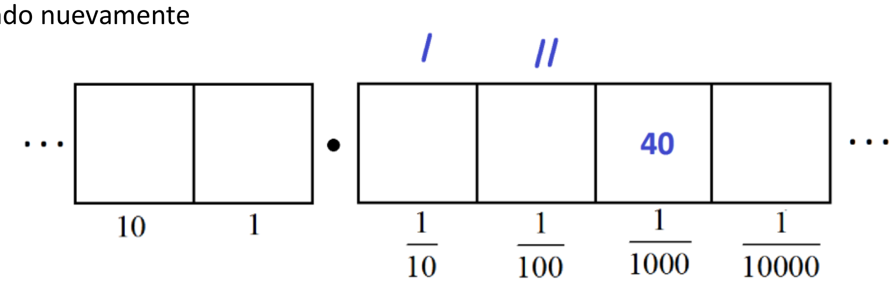
Dos des-explosiones más.



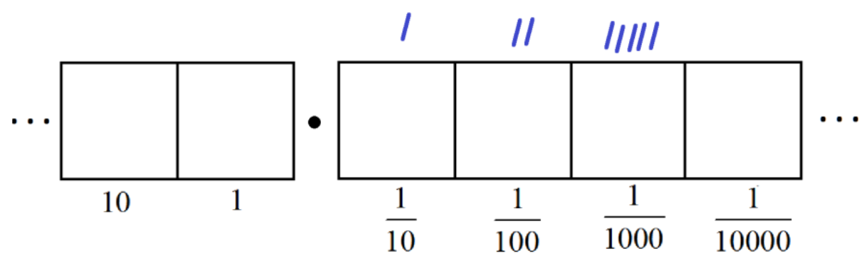
Esto nos proporciona dos grupos de ocho más dejando cuatro atrás.



Des-explotando nuevamente



revela cinco grupos de ocho más sin dejar un residuo.



Vemos que, como decimal, $\frac{1}{8}$ resulta ser 0.125. Y para confirmarlo tenemos que

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

He aquí algunos problemas de práctica para que escojan.

18. Hagan la división $\frac{1}{4}$ en máquina $1 \leftarrow 10$, para demostrar que es el decimal 0.25.

19. Hagan la división $\frac{1}{2}$ en máquina $1 \leftarrow 10$, para demostrar que es el decimal 0.5.

20. Hagan la división $\frac{3}{5}$ en máquina $1 \leftarrow 10$, para demostrar que es el decimal $1 \leftarrow 10\ 0.6$.

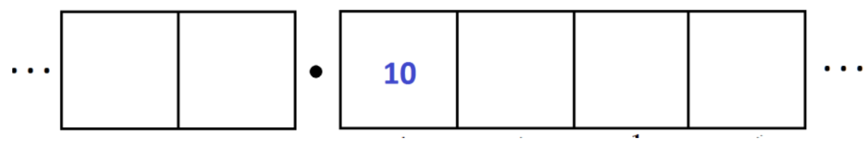
21. Hagan la división $\frac{3}{16}$ en máquina $1 \leftarrow 10$, para demostrar que es el decimal 0.1875.

22. ¿En su forma más reducida, cuál fracción está representada por cada uno de los siguiente decimales?

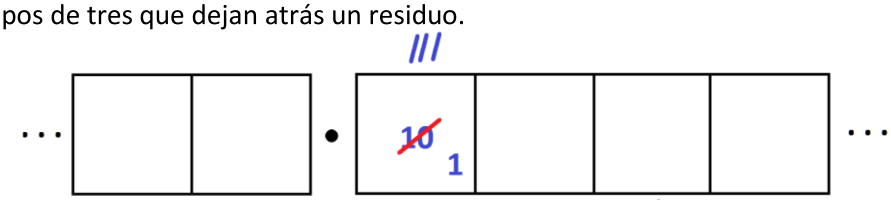
0.75 0.625 0.16 0.85 0.0625

No todas las fracciones llevan a representaciones de decimales simples. Por ejemplo, consideren la fracción $\frac{1}{3}$. Para calcularla, buscamos grupos de tres en el siguiente dibujo.

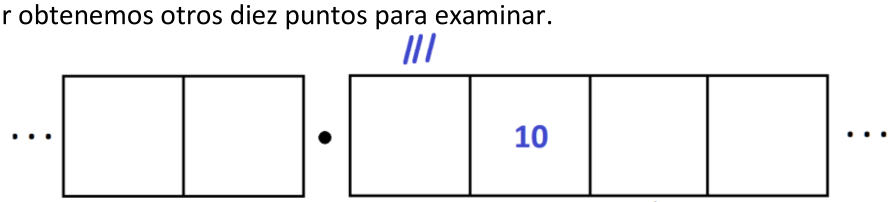
Des-explotemos.



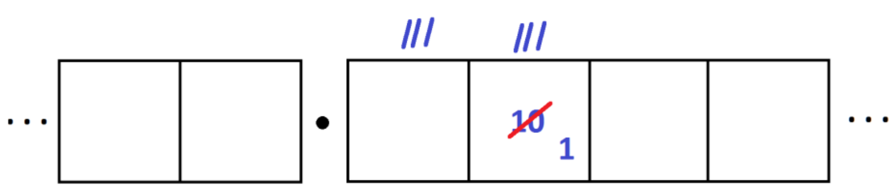
Vemos tres grupos de tres que dejan atrás un residuo.



Al des-explotar obtenemos otros diez puntos para examinar.



Encontramos tres grupos más de tres que dejan atrás uno.



Y así sucesivamente. Estamos atrapados en un ciclo que se repite infinitamente.

Esto nos coloca en una posición filosófica interesante. Como seres humanos no podemos llevar a cabo esta, o ninguna otra actividad, por una cantidad infinita de tiempo. Pero es muy tentador escribir

$$\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$$

donde la L (de *ellipsis* en Inglés o *puntos suspensivos* en Castellano) representa la instrucción "continúa con este patrón por siempre." Casi podemos imaginar en nuestra mente lo que eso significa. Pero como seres humanos prácticos está más allá de nuestras habilidades: de hecho uno no puede escribir esos infinitos 3s representados por la L.

Sin embargo, mucha gente escoge no contemplar el significado de un enunciado como ese sobre el infinito y simplemente continúa su trabajo diciendo que algunos decimales son infinitamente largos y no se preocupan más por eso. En cuyo caso, la fracción $\frac{1}{3}$ es una de esas fracciones cuya expansión decimal continúa por siempre.

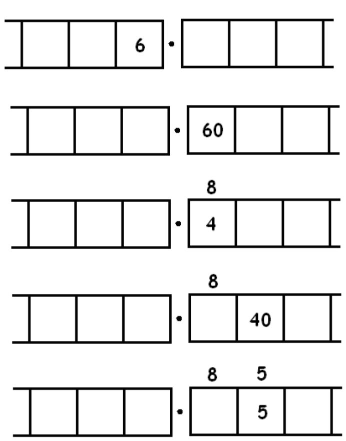
Notación: Mucha gente usa el *vinculum* (barra horizontal) para representar decimales largos que se repiten. Por ejemplo, $0.\overline{3}$ significa "repetir 3 por siempre"

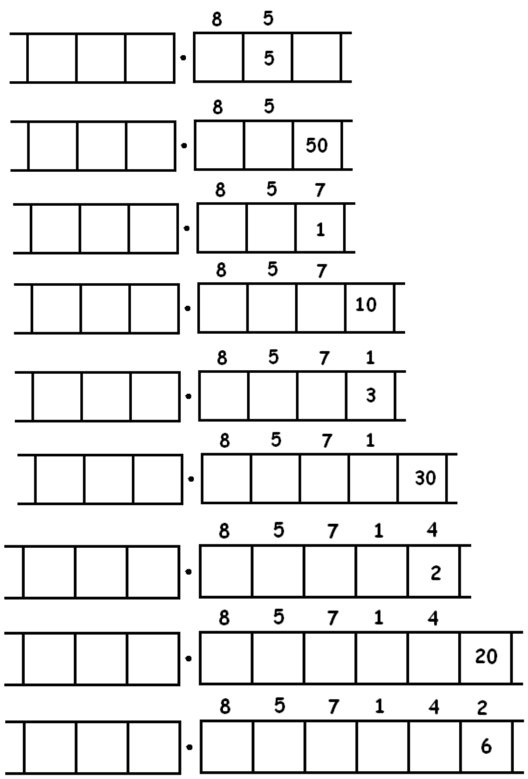
$$0.\overline{3} = 0.3333\cdots$$

y $0.38\overline{142}$ significa "repetir el grupo 142 por siempre" después del "38":

$$0.38\overline{142} = 0.38142142142142\cdots.$$

Como otro ejemplo (complicado), he aquí el trabajo que convierte la fracción $\frac{6}{7}$ en un decimal que se repite infinitamente. Asegúrense que comprenden los pasos de una línea a la siguiente.





¿Lo ven, con el 6 en la última casilla de la derecha hemos regresado al comienzo del problema? Esto significa que simplemente debemos repetir el mismo trabajo y obtener la misma secuencia 857142 como respuesta, y otra vez, y otra vez más. Tenemos que

$$\frac{6}{7} = 0.857142857142857142857142\cdots.$$

Algunas preguntas más de práctica si quieres.

23. Calculen $\frac{4}{7}$ como decimal infinitamente repetitivo.

24. Calculen $\frac{1}{11}$ como decimal infinitamente repetitivo.

25. ¿Cuáles de las siguientes fracciones dan expansiones decimales infinitamente largas?

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10}$$

26. Usen una máquina $1 \leftarrow 10$ para calcular $133 \div 6$, y escriban la respuesta como un decimal.

27. Usen una máquina $1 \leftarrow 10$ para calcular $255 \div 11$, y escriban la respuesta como un decimal.

NUMEROS IRRACIONALES

Hemos visto que las fracciones pueden tener expansiones decimales finitas. Por ejemplo,

$$\frac{1}{8} = 0.125 \text{ y } \frac{1}{2} = 0.5 .$$

Y hemos visto que las fracciones pueden tener expansiones decimales infinitas. Por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0.3333.... \text{ y } \frac{6}{7} = 0.857142057142857142... .$$

Todos los ejemplos de fracciones con expansiones decimales infinitas que hemos visto hasta ahora caen en un patrón repetitivo. Esto es curioso.

Hasta podríamos decir que nuestros ejemplos finitos eventualmente caen en un patrón repetitivo, un patrón repetitivo de ceros después del inicio.

$$\frac{1}{8} = 0.12500000.... = 0.125\overline{0}$$

$$\frac{1}{2} = 0.50000.... = 0.5\overline{0}$$

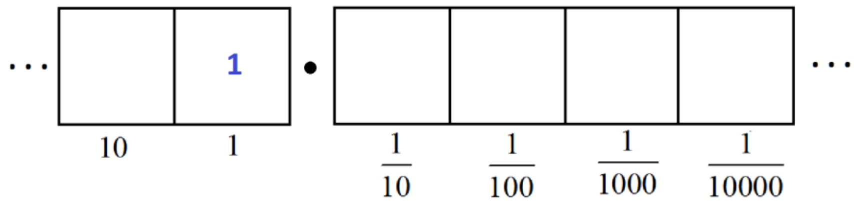
$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

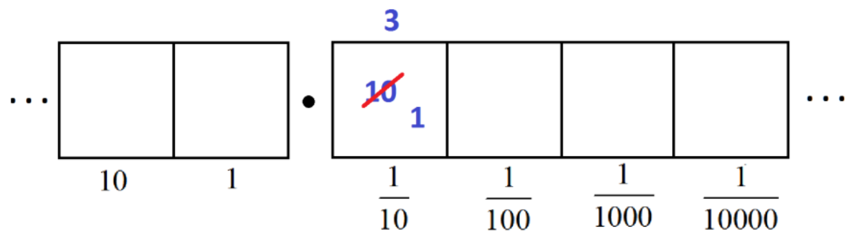
Esto nos lleva a la pregunta: ¿Será que toda fracción tiene una expansión decimal que eventualmente repite?

La respuesta es SI y nuestro método de división explica por qué.

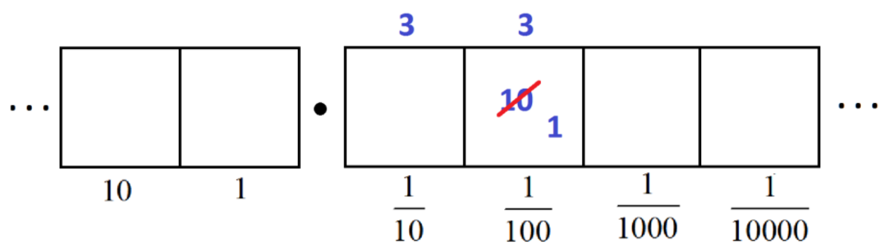
Revisemos nuevamente el proceso de división, lentamente, con un ejemplo familiar primero. Calculemos otra vez la expansión decimal de $\frac{1}{3}$ en una máquina $1 \leftarrow 10$. Pensamos en $\frac{1}{3}$ como la respuesta al problema de división $1 \div 3$, por lo que debemos encontrar grupos de tres en un diagrama de un punto.



Des-explotamos el único punto para obtener diez puntos en la casilla de las décimas. Ahí conseguimos tres grupos de tres que dejan un resto de uno en esa casilla.



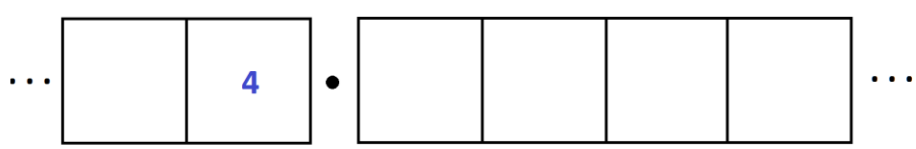
Ahora podemos des-explotar ese punto único de la casilla de las décimas y pintar diez puntos en la casilla de las centésimas. Ahí conseguimos tres grupos más de tres, que nuevamente dejan un único punto atrás.



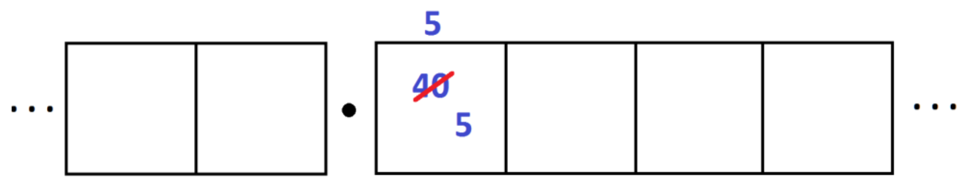
Y así sucesivamente. Estamos atrapados en un ciclo donde siempre tenemos el mismo resto de un punto de casilla a casilla, lo cual quiere decir que el mismo patrón se repite. Por tanto concluimos que $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$. El punto clave es que el resto de un único punto siguió apareciendo.

He aquí un ejemplo más complicado. Calculemos la expansión decimal de $\frac{4}{7}$ en una máquina $1 \leftarrow 10$.

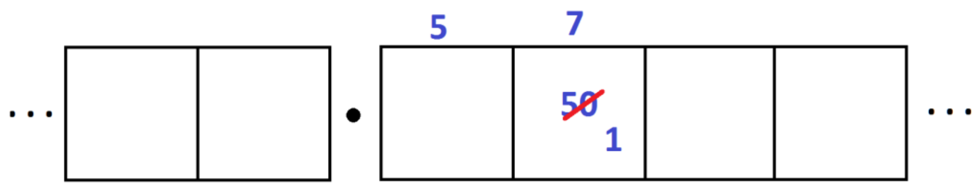
Es decir, calculemos $4 \div 7$.



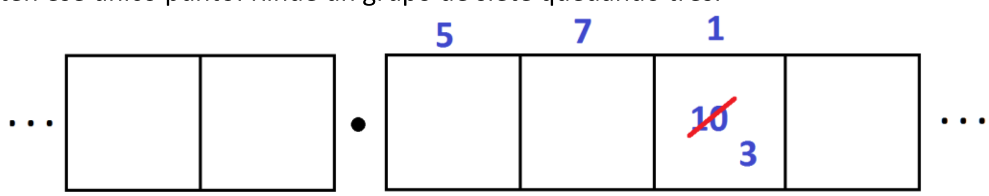
Comenzamos por des-explotar los cuatro puntos para obtener 40 puntos en la casilla de las décimas. Ahí conseguimos 5 grupos de siete, que dejan 5 puntos de sobra.



Ahora des-exploten esos cinco puntos para obtener 50 puntos en la casilla de las centésimas. Ahí encontramos 7 grupos de siete, quedando uno de sobra.

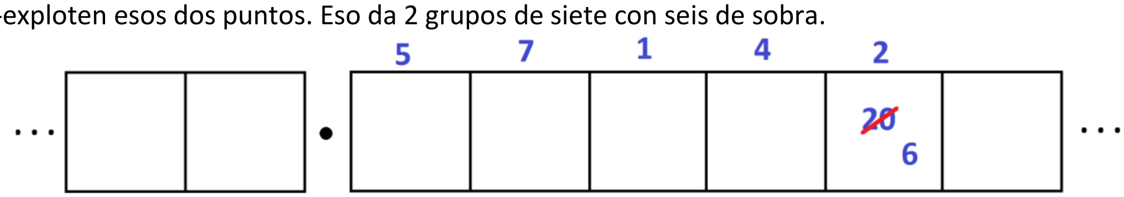


Des-exploten ese único punto. Rinde un grupo de siete quedando tres.

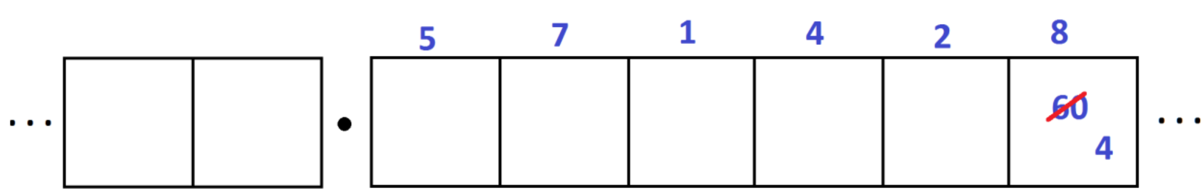


Des-exploten esos tres puntos. Eso da 4 grupos de siete con dos de sobra.

Des-exploten esos dos puntos. Eso da 2 grupos de siete con seis de sobra.



Des-exploten los seis puntos. Eso da 8 grupos de siete con cuatro de sobra.



¡Pero este es el predicamento inicial: cuatro puntos en una casilla!

Entonces ahora vamos a repetir el patrón y un ciclo en la representación. Tenemos que

$$\frac{4}{7} = 0.571428 \quad 571428 \quad 571428 \quad \cdots.$$

Alejándonos del detalle específico de este problema, es evidente que nos vemos obligados a entrar en un patrón repetitivo. Al dividir una cantidad por siete, sólo hay siete números posibles como puntos restantes en una casilla - 0, 1, 2, 3, 4, 5, ó 6 – y no hay otra opción más que eventualmente repetir el resto y entrar en un ciclo.

De la misma manera, la expansión decimal de $\frac{18}{37}$ también debe entrar en ciclo. Al hacer la división, sólo hay treinta-y-siete posibles restos como puntos en una casilla (0, 1, 2, …, 36). Al ir completando el cálculo de la división, eventualmente tenemos que repetir un resto y otra vez caer en un ciclo.

Acabamos de establecer un hecho muy interesante.

TODAS LAS FRACCIONES TIENEN UNA REPRESENTACION DECIMAL REPETITIVA.

(Un patrón repetitivo de ceros es posible. De hecho, como confirmación, realicen el procedimiento de división para la fracción $\frac{1}{8}$. Asegúrense de entender dónde comienza el ciclo de los restos que se repiten.

Esto ahora da lugar a una idea curiosa:

¡Una cantidad dada por una expansión decimal que no repite no puede ser una fracción!

Por ejemplo, la cantidad

$$0.10\ 1100\ 111000\ 11110000\ 1111100000\cdots$$

está diseñada para no repetir (aunque hay un patrón que rige esta expansión decimal) y por tanto representa un número que no es una fracción.

Un número que equivale al cociente de dos números enteros (es decir, una fracción) se llama *número racional*. A un número que no puede representarse de esta manera se le llama *número irracional*.

¡Parece que acabamos de demostrar que existen los números irracionales! No todos los números son fracciones.

¡De hecho, ahora podemos inventar todo tipo de números que no pueden ser fracciones! Por ejemplo

$$0.102030405060708090100110120130140150\cdots$$

y

$$0.3030030003000030000030000003\cdots$$

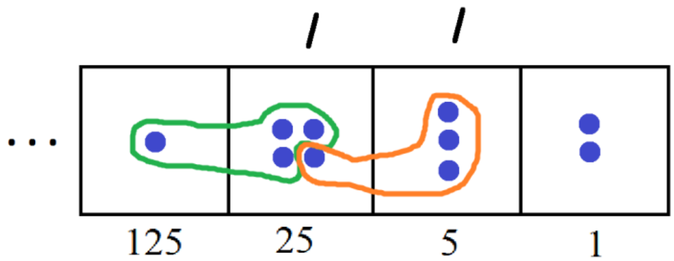
son números irracionales.

Por supuesto, hemos escuchado que números como $\sqrt{2}$ y π son números irracionales. No es para nada obvio por qué lo son y cómo podría probarse que lo son. (De hecho, le tomó a los matemáticos como 2000 años para finalmente establecer que π es un número irracional. El matemático Sueco Johann Lambert finalmente lo probó en 1761.) ¡Pero si están dispuestos a creer que estos números son irracionales, entonces pueden decir con seguridad que sus expansiones decimales no poseen patrones repetitivos!

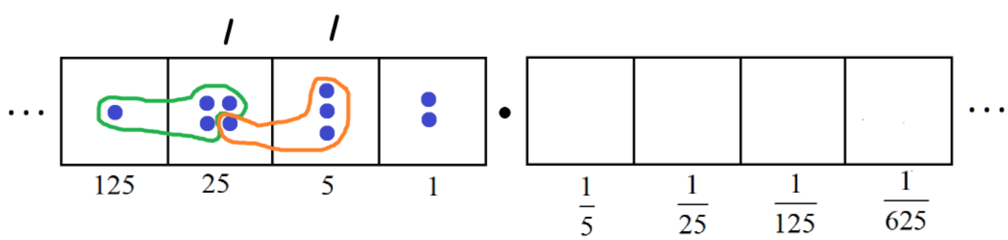
DECIMALES EN OTRAS BASES

¿Quién dijo que tenemos que quedarnos en la máquina $1 \leftarrow 10$?

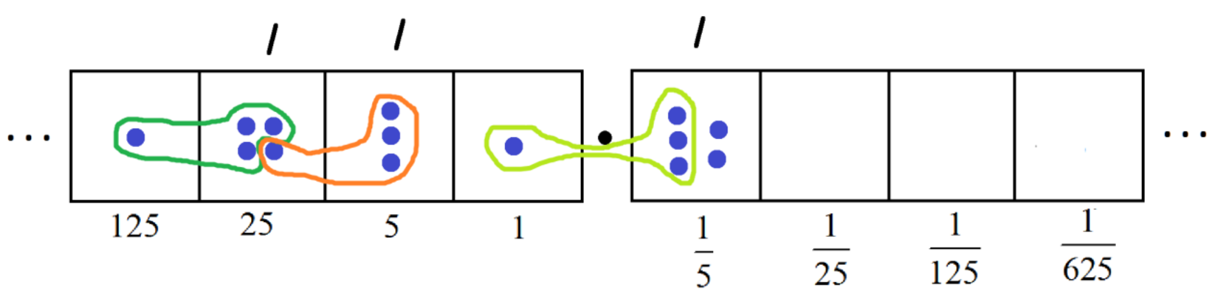
El siguiente dibujo en una máquina $1 \leftarrow 5$ muestra que $1432 \div 13 = 110\ R\ 2$.



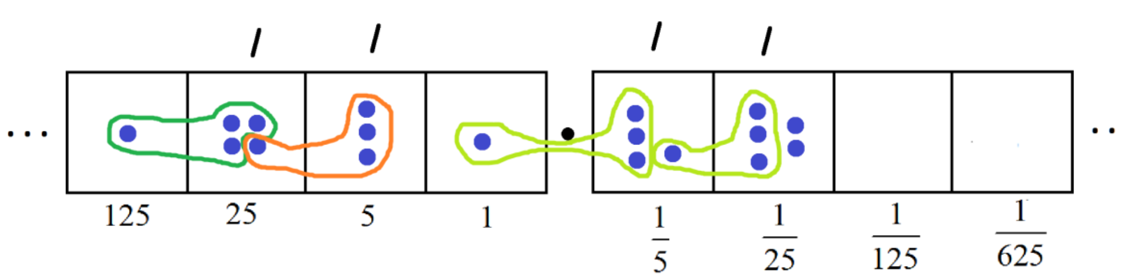
Si trabajamos con los recíprocos de potencias de cinco podemos seguir des-explotando puntos y continuar el proceso de división.



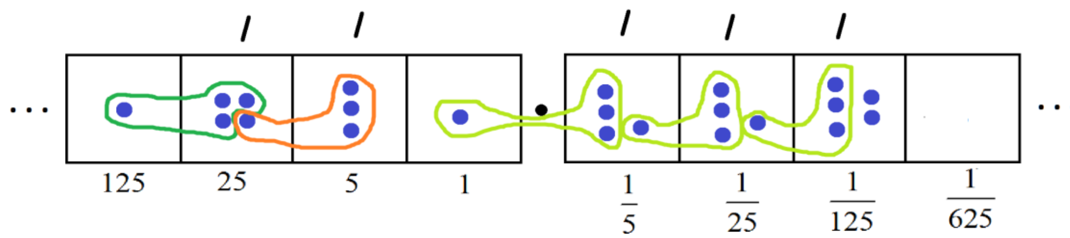
¡Aquí va!



(Si gustan esto se lee como $1432 \div 13 = 110.1\ R\ 0.2$)



(Si gustan esto se lee como $1432 \div 13 = 110.11 R\ 0.02$)



Y así sucesivamente. Obtenemos esto como enunciado en aritmética de base 5,

$$1432 \div 13 = 110.1111\cdots.$$

Para traducirlo a aritmética común tenemos que

1432 en base cinco es $1\times125+4\times25+3\times5+1\times1=242$,
13 en base cinco es $1\times5+3\times1=8$,
$110.111...$ en base cinco es $30+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots$,

entonces estamos alegando, en aritmética común, que

$$242\div8=30+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots\ .$$

¡Woa!

Pregunta: ¿Qué dice la fórmula de serie geométrica del capítulo 7 sobre la suma $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots$? ¿Equivale a un cuarto? (Para ser claro, en el capítulo 7 demostramos que

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

Multiplicando por x da

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{x}{1-x}.$$

Quizás esta sea la versión de fórmula de serie geométrica con la que debemos trabajar ahora.)

Si se sienten a la altura, aquí hay varios problemas de práctica (desafiantes).

28. Calculen $8\div3$ en máquina de base 10 y demuestren que da $2.666\cdots$.

29. Calculen $1\div11$ como problema en base 3 y demuestren que da $0.0202020202\cdots$.

(En base tres, “11” es el número cuatro, por lo que esta pregunta establece que la fracción $\frac{1}{4}$ escrita en base tres es $0.0202020202\cdots$.)

30. Demuestren que la fracción $\frac{2}{5}$, escrita aquí en base diez, tiene la representación “decimal” $0.121212\cdots$ en base cuatro. (Es decir, calculen $2 \div 5$ en máquina $1 \leftarrow 4$)

31. RETO: ¿Cuál fracción tiene la expansión decimal $0.3333\cdots$ en base 7? ¿Se puede contestar esta pregunta llamando a este número x y multiplicando ambos lados por 10? (¿El “10” representa diez?)

32. Usen una máquina $1 \leftarrow x$ y x-males para comprobar que $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \cdots$.

EXPLORACIONES SALVAJES

He aquí algunas investigaciones de "preguntas importantes" que quizás quieran explorar, o simplemente pensar sobre ella. ¡Diviértanse!

EXPLORACION 1: ¿CUÁLES FRACCIONES PRODUCEN EXPANSIONES DECIMALES FINITAS?

Hemos visto que $\frac{1}{2} = 0.5$ y $\frac{1}{4} = 0.25$ y $\frac{1}{8} = 0.125$ tienen expansiones decimales finitas. (Estamos ignorando ahora la repetición infinita de ceros.)

¡Claro, todos los decimales finitos tienen expansiones decimales finitas! Por ejemplo, 0.37 es la fracción $\frac{37}{100}$, demostrando que $\frac{37}{100}$ tiene una expansión decimal finita.

¿Qué debe ser cierto respecto a y b (o sólo respecto a a o sólo respecto a b) para que la fracción $\frac{a}{b}$ tenga una expansión decimal finita?

EXPLORACION 2: ¿A LA INVERSA? ¿SON FRACCIONES LOS DECIMALES REPETITIVOS?

Hemos visto que $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ y que $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$, por ejemplo, y que cada fracción (eventualmente) da una expansión decimal que repite, quizás con ceros.

¿Es también verdad lo inverso? ¿Qué cada decimal repetitivo corresponde a una fracción?

> ¿Es $0.\overline{17}$ una fracción? De ser así, cuál fracción es?
> ¿Es $0.\overline{450}$ una fracción? De ser así, cuál fracción es?
> ¿Es $0.322222... = 0.3\overline{2}$ una fracción? ¿Es $0.17\overline{023}$ una fracción?

¿En efecto, existe un valor que es una fracción para cada decimal repetitivo?

SOLUCIONES

Como prometido, aquí están mis soluciones a los problemas planteados.

1. "Seis Décimas" dice exactamente lo que es el número.

2. En efecto ambos estudiantes acertaron. Unas explosiones en el dibujo de Subra dan lugar al dibujo de JinJin. (¡Y unas des-explosiones en el dibujo de JinJin dan lugar al de Subra!)

3. a) B b) C

4. Tenemos, en orden, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, y $\frac{1}{250}$.

5. Tenemos, en orden, $\frac{4}{10}=0.4$, $\frac{4}{100}=0.04$, $\frac{5}{100}=0.05$, $\frac{5}{1000}=0.005$, y $\frac{8}{10000}=0.0008$.

6. a) B b) D

7. En orden, tenemos 0.35, 0.64, 0.602, 0.34, y 0.75.

8. a) Como número mixto es $2\frac{3}{10}$. O podríamos escribir $2+\frac{3}{10}=\frac{20}{10}+\frac{3}{10}=\frac{23}{10}$.

   b) $17+\frac{4}{100}=17\frac{1}{25}$.

   c) $1003\frac{1003}{10000}$.

9. a) Des-explotar un punto en la casilla de las décimas si le "suma" diez puntos a la casilla de las centésimas.

   b) Des-explotar un punto en la casilla de las décimas si nos da 19 puntos en la casilla de las centésimas. Des-explotar esos da 190 puntos en la casilla de las milésimas.

   c) No hay mucho que decir aquí. Uno puede ver que se puede convertir un dibujo en el otro con explosiones y/o des-explosiones.

   d) ¡Sí! Todos los dibujos son lo mismo, por lo tanto 0.19 y 0.190 son el mismo número.

10. a) 5.3

b) $7+\frac{2}{10}=7.2$

c) 13.5

d) $106+\frac{15}{100}=106.15$

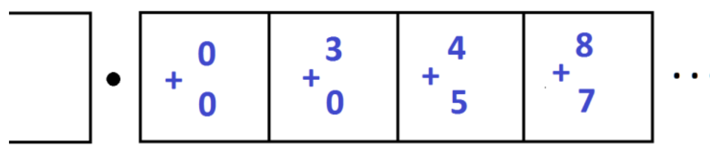
e) $3+\frac{3}{25}=3+\frac{12}{100}=3.12$

f) $2+\frac{1}{4}=2+\frac{25}{100}=2.25$

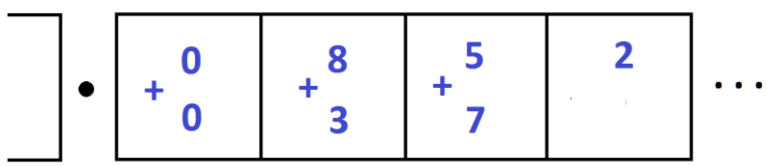
g) $3+\frac{11}{40}=3+\frac{275}{1000}=3.275$

11. $0.05+0.006=0.056$ y $0.05-0.006=0.0\,|\,5\,|-6=0.044$. Dibujar los puntos y casillas aclara las respuestas.

12. Si dibujo los puntos y casillas, entonces si estoy de acuerdo con Agatha.



Pero no estoy de acuerdo con Percy.



13. Multiplicar por 100 es lo mismo que multiplicar por diez y multiplicar por diez otra vez.

14. Tenemos que $0.04\times 0.5=\frac{4}{100}\times\frac{5}{10}=\frac{20}{1000}=\frac{2}{100}=0.02$.

(Hubiésemos podido ver esto enseguida si hubiésemos notado que 0.5 es la mitad, y la mitad de 0.04 es 0.02.)

Tenemos que $1000\times 0.0385=1000\times\left(\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}\right)=30+8+\frac{5}{10}=38.5$.

15. Tenemos que $\frac{0.9}{10}=\frac{9}{100}=0.09$.

Tenemos que $\frac{2.34}{1000}=\frac{1}{1000}\times\left(2+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}\right)=\frac{2}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{4}{100000}=0.00234$.

Tenemos que $\left(40+\frac{4}{100}\right)\times\frac{1}{100}=\frac{4}{10}+\frac{4}{10000}=0.4004$.

16. $\frac{0.75}{25}=\frac{75}{2500}=\frac{3}{100}=0.03$.

17. Esta es técnicamente una respuesta tipo si/no, y la respuesta inteligente es no.

Para aquellos que contestaron si, aquí está mi estrategia.

a) $0.3\times(5.37-2.07)=0.3\times(3.3)=\frac{3}{10}\times\left(3+\frac{3}{10}\right)=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=0.99$

b) $\frac{0.1+(1.01-0.1)}{0.11+0.09}=\frac{0.1+(0.91)}{0.2}=\frac{1.01}{0.2}=\frac{101}{20}=\frac{505}{100}=5.05$.

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{(0.002+0.2\times 2.02)(2.2-0.22)}{2.22-0.22} &= \frac{(0.002+0.404)(1.98)}{2} \\
&= \frac{(0.406)(1.98)}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{4}{10}+\frac{6}{1000}\right)\left(1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100}\right)\times 1000\times 100}{2\times 1000\times 100} \\
&= \frac{(400+6)(100+90+8)}{2\times 1000\times 100} \\
&= \frac{406\times 198}{2\times 1000\times 100} \\
&= \frac{80388}{2\times 100000} \\
&= \frac{40194}{100000} \qquad = 0.40194
\end{aligned}
$$

¡Woa!

18. ¡Háganlo!

19. ¡Háganlo también!

20. ¡Sip, háganlo!

21. ¡Adivinaron. Háganlo!

22. En orden, tenemos $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{17}{20}$, y $\frac{5}{80}$.

23. Obtenemos $\frac{4}{7} = 0.571428\ 571428\ 571428\ 571428\ \ldots$.

24. Obtenemos $\frac{1}{11} = 0.09\ 09\ 09\ 09\ \ldots$.

25. Las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, y $\frac{1}{9}$ tienen expansiones decimales infinitamente largas.

26. $\frac{133}{6} = 22.166666\ldots$.

27. $\frac{255}{11} = 23.18181818\ldots.$.

28. ¡Háganlo!

29. ¡Háganlo también!

30. ¡Sip, háganlo!

31. Escribamos todo en máquina $1 \leftarrow 7$. Entonces el número siete es 10 y uno menos que eso es 6. También, dense cuenta que multiplicar un número por siente en una máquina $1 \leftarrow 7$ tiene el efecto de añadir un cero al final del número. (¿Ven por qué? Es la misma razón por la cual multiplicar por diez en una máquina $1 \leftarrow 10$ tiene el efecto de añadir un cero.) Multiplicar por siete también "corre el punto decimal" un puesto.

    Establezcan que $0.333\ldots. = x$.

    Multipliquen cada lado por siete (lo cual se ve como una 10). Esto da

$$3.3333... = 10x\ .$$

El lado izquierdo es $3 + 0.3333...$, es decir, 3 más que el número original.

$$3 + x = 10x$$

Sustraigan x de ambos lados.

$$3 = 6x$$

¡Entonces x debe ser igual a la mitad!

32. ¿Pueden ver cómo hacerlo?