ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ
ГЛАВА 9

СТРАННИ И ЩУРИ МАШИНИ

Супер. Време е да се развихрим.

Тук ще ви представя цяла поредица от луди и странни машини, по които да си мислите, някои от тях пораждащи загадъчни математически въпроси, които и до днес никой не е успял да разгадае! Сега ние ще се гмурнем с всички сили в територията на оригиналното креативно мислене и ще правим нови открития. Някои закономерности, които откриете и обясните може да се окажат нови за света!

Така че пощурейте! Играйте си с различните идеи, които ще ви представя в тази глава. Изобретете свои собствени обобщения и вариации. И най-вече, забавлявайте се!

ЩУРА ИДЕЯ 1: БРОЙНА СИСТЕМА ЕДНО-И-ПОЛОВИНА?

Нека се развихрим!

Какво мислите за $1 \leftarrow 1$ машината?

Какво ще стане ако сложите една единствена точка? Тази $1 \leftarrow 1$ машина интересна ли е? А полезна ли е?

Какво мислите за $2 \leftarrow 1$ машината?

Какво ще стане ако сложите една единствена точка?

Каква си мислите, че би била ползата от една $2 \leftarrow 1$ машина?

След като отделите един момент да си помислите по тези въпроси може би ще се съгласите, че няма много неща, които можем да кажем за тези машини. И двете се изстрелват “към безкрайността” когато сложим една точка в тях и ние имаме малко контрол върху случващото се.

А какво ще кажете за това?

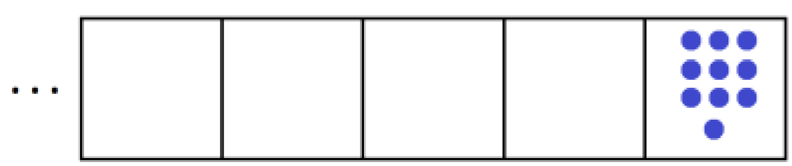
Какво мислите за една $2 \leftarrow 3$ машина?

Тази машина замества три точки в една кутия с две точки в кутията вляво от нея.

Ах! Сега вече надушвам нещо интересно. Тази машина прави разни чудновати неща.

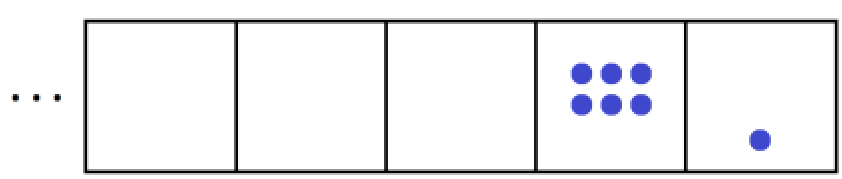
Например, ако сложим десет точки в машината получаваме

$2 \leftarrow 3$

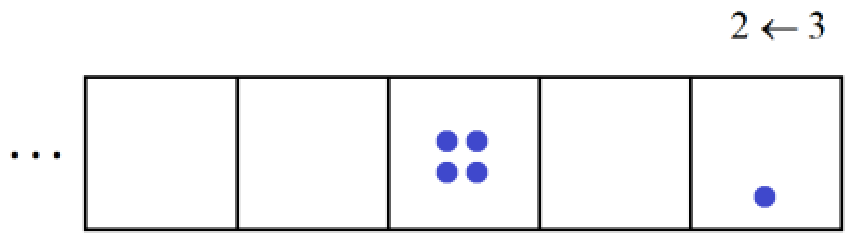


Първо се случват три експлозии,

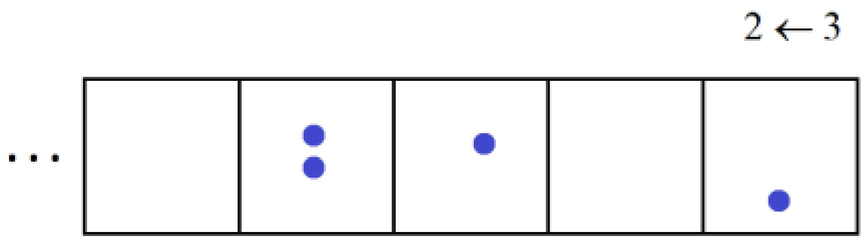
$2 \leftarrow 3$



след това още две,



и после още една.



Виждаме как кодът 2101 на числото десет се появи пред очите ни в тази $2 \leftarrow 3$ машина.

Всъщност, нека ви дам $2 \leftarrow 3$ кодовете за първите петнадесет числа. (Проверете ги!)

1: 1	**6: 210**	**11: 2102**
2: 2	**7: 211**	**12: 2120**
3: 20	**8: 212**	**13: 2121**
4: 21	**9: 2100**	**14: 2122**
5: 22	**10: 2101**	**15: 21010**

Няколко въпроса като за начало:

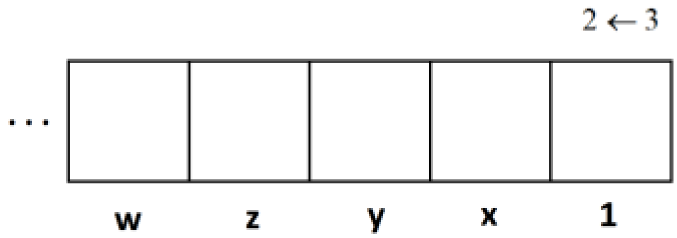
- Разумно ли изглежда твърдението, че само цифрите 0, 1 и 2 могат да се появяват в тези кодове?
- Разумно ли изглежда твърдението, че последните цифри на тези кодове образуват цикъла $1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots$?
- Можем ли да смятаме в тази странна машина? Например, ето как изглежда $6+5$. Отговорът наистина ли е единадесет, което има код 2102?

$$\begin{array}{r} 210 \\ +22 \\ \hline 232 \end{array}$$

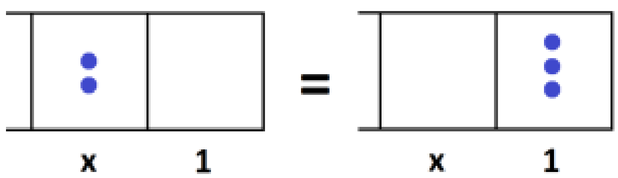
Но истинският въпрос е: *Какво са тези кодове? Какво правим ние всъщност когато представяме числата по този начин? Тези кодове имат ли си позиционна бройна система с някаква база?*

Разбира се, заглавието на тази секция издава отговора, но нека си поразсъждаваме по математиката на тази машина.

Всяка от точките в най-дясната кутия, както винаги, имат стойност 1. Нека наречем стойностите на точките в оставащите кутии x, y, z, w, ...

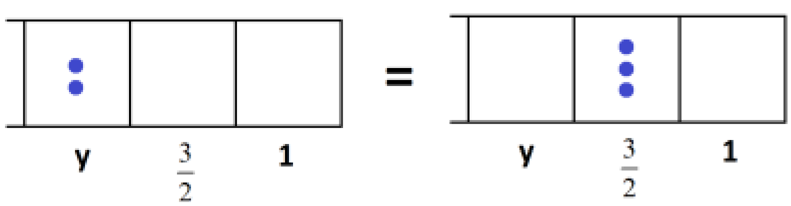


А сега, три точки в позицията на 1ците са напълно еквивалентни на две точки в позицията на xовете.



Това ни казва, че $2x = 3 \cdot 1$, откъдето следва, че $x = \frac{3}{2}$, едно-и-половина.

По същия начин получаваме, че $2y = 3 \cdot \frac{3}{2}$.



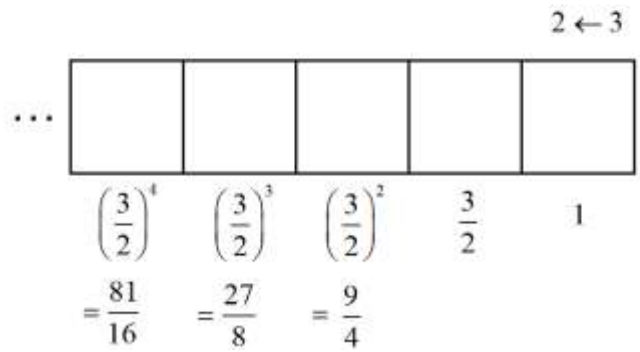
Получаваме, че $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, което е $\frac{9}{4}$.

И аналогично,

$2z = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2$ което дава $z = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, което прави $\frac{27}{8}$,

$2w = 3\left(\frac{3}{2}\right)^3$ дава $w = \left(\frac{3}{2}\right)^4$, тоест $\frac{81}{16}$

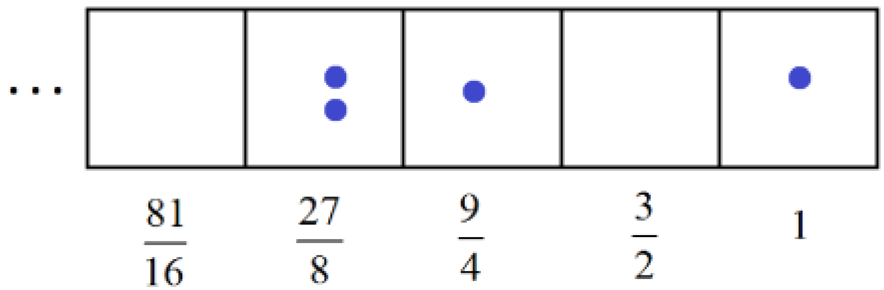
и т.н. Ние наистина работим в нещо, което много прилича на една едно-и-половина бройна система!



Забележка: Членовете на математическите общества може да не предпочетат да наричат това едно-и-половина бройна система в техническия смисъл, защото така се използва цифрата “2”. Тази цифра е по-голяма от базовото число. За да видите какъв език се използва, както и работата, която е била извършена в тази насока, потърсете “бета разширения” и “нецели представяния” в интернет. Иначе, имайте предвид, че когато казвам “едно-и-половина бройна система” в тази глава, аз наистина имам предвид “представянето на целите числа като суми от степените на едно и половина, чрез използване на коефициентите 0, 1 и 2.” Тоест, имам предвид математиката, която произлиза от нашата $2 \leftarrow 3$ машина.

Аз лично намирам тази версия на едно-и-половина бройната система интуитивно обезпокоителна! Ние казваме, че всяко цяло число може да бъде представено като комбинация на дробите 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{81}{16}$ и т.н. Това са отвратителни дроби!

Например, ние видяхме, че числото десет има код 2101.



Вярно ли е, че тази комбинация от дроби $2\times\frac{27}{8}+1\times\frac{9}{4}+0\times\frac{3}{2}+1\times1$ наистина се оказва равна на числото десет? Да! И на това, аз казвам: уау!

Човек може да си задава купища въпроси, свързани с тази $2 \leftarrow 3$ машина, или версия на бройната система едно-и-половина и много от тях представляват нерешени научни въпроси и до ден днешен! За справка, ето кодовете на първите четиридесет числа в енда $2 \leftarrow 3$ машина (заедно с нулата в началото).

0			
1	2102	21220	212021
2	2120	21221	212022
20	2121	21222	212210
21	2122	210110	212211
22	21010	210111	212212
210	21011	210112	2101100
211	21012	212000	2101101
212	21200	212001	2101102
2100	21201	212002	2101120
2101	21202	212020	2101121

ВЪПРОС 1: ЗАКОНОМЕРНОСТИ?

Намирате ли интересни закономерности като гледате тези представяния?
Защо трябва всичките представяния (след първото) да започват с цифрата 2?
Всички ли представяния след числото шест започват с 21?
Ако продължите да изписвате числата до колкото си искате, дали по някое време първите три цифри ще се "стабилизират"?
А какво можете да кажете за последните цифри? А за последните две цифри?

Забележка: Др. Джим Проп от Университета Лауъл в Масачузетс, който ми отвори очите за $2 \leftarrow 3$ машината предлага следните по-издържани въпроси.

Какви редички могат да се появяват в началото на безбройно много кодове в $2 \leftarrow 3$ машината?

Какви редички могат да се появяват в края на безбройно много кодове в $2 \leftarrow 3$ машината?

Какви редички могат да се появяват някъде в средата на безбройно много кодове в $2 \leftarrow 3$ машината?

ВЪПРОС 2: А ЧЕТНИТЕ ЧИСЛА?

Погледнете списъка с първите четиридесет кода в $2 \leftarrow 3$ машината. Човек може да забележи следния "признак за делимост" на три.

Едно число, записано чрез своя $2 \leftarrow 3$ код се дели на три само когато последната му цифра е нула.

Какъв може да е признакът за деление на две на числата, записани чрез своя $2 \leftarrow 3$ код? Какво е общото свойство, което всеки втори код притежава?

0			
2	2120	21221	212022
21	2122	210110	212211
210	21011	210112	2101100
212	21200	212001	2101102
2101	21202	212020	2101121

ВЪПРОС 3: ЕДИНСТВЕНОСТ?

Докажете, че тези $2 \leftarrow 3$ машинни представяния на числата, които използват само цифрите 0, 1 и 2 са единствени.

[И като безкрайно много пъти между другото: Докажете, че всяко цяло число може да бъде записано по единствен начин като суми от степените на $\frac{7}{5}$, като може да се използват коефициентите $0,1,2,3,4$. Още, докажете, че всяко цяло число може да бъде записано по единствен начин като суми от степените на $\frac{13}{8}$, като може да се използват коефициентите $0,1,2,3,4,5,6,7$. И пак, докажете, че всяко цяло число може да бъде записано по единствен начин като суми от степените на $\frac{339}{56}$, като може да се използват коефициентите $0,1,2,3,..,55$. И така нататък!]

ВЪПРОС 4: ЦЯЛО ЧИСЛО ЛИ Е?

Не всеки набор от 0 ли, 1 ци и 2 ки ще бъде кода на цяло число в $2 \leftarrow 3$ машината. Например, поглеждайки към списъка на първите четиридесет кода, виждаме, че 201 е прескочен. Следователно тази комбинация от степените на едно-и-половина не е цяло число. (Тя е числото $5\frac{1}{2}$.)

Ето един въпрос: *Определете дали кода*

$$2102212020120020122011201102202010221020100202212$$

отговаря на цяло число в една $2 \leftarrow 3$ *машина.*

Разбира се, можем просто да пресметнем сумите от степените, на които това отговаря и да видим дали резултатът е цяло число. Но това не звучи особено забавно!

Има ли някакъв бърз и ефикасен трик, чрез който да определим дали произволна редичка от 0 ли, 1ци и 2ки отговаря на кода на цяло число или не? (Разбира се, може да се поспори за дефиницията на "бърз" и "ефикасен".)

ВЪПРОС 5: БРОЙ НА ЦИФРИТЕ

А сега погледнете отново първите четиридесет $2 \leftarrow 3$ кода.

0			
1	2102	21220	212021
2	2120	21221	212022
20	2121	21222	212210
21	2122	210110	212211
22	21010	210111	212212
210	21011	210112	2101100
211	21012	212000	2101101
212	21200	212001	2101102
2100	21201	212002	2101120
2101	21202	212020	2101121

Забележете, че

0 отговаря на първия едноцифрен код. (Някои може би ще предпочетат да кажат 1 тук.)

3 отговаря на първия двуцифеен код.

6 отговаря на първия трицифрен код.

9 отговаря на първия четирицифрен код.

и така нататък.

Оттук получаваме следната редичка: **3, 6, 9, 15, 24, ….** (Прескачаме началото, защото то е под въпрос.)

Виждате ли някаква закономерност в тази редица?

Ако си мислите за редицата на Фибоначи, то, за важе съжаление, ще бъдете разочаровани когато видите следващите няколко числа от редицата.

$$36, 54, 81, 123, 186, 279, 420, 630, \ldots$$

Една рекурентна формула.

Нека a_N представлява N тото число в тази редица, като считаме 1 за първия едноцифрен отговор. Знаем, че

$$a_{N+1} = \begin{cases} \dfrac{3a_N}{2} & \text{if } a_N \text{ is even} \\ \dfrac{3(a_N+1)}{2} & \text{if } a_N \text{ is odd.} \end{cases}$$

(Ако се нуждаем от m точки в най-дясната кутия, за да получим код, който има N цифри, то колко точки трябва да поставим в $2 \leftarrow 3$ машината, така че да си подсигурим, че m точки ще се появят във втората кутия? Това ще ни даде код с $N+1$ цифри.)

Затворена формула?

Има ли затворена формула за a_N ? С други думи, възможно ли е да сметнем a_{1000} без да се налага да смятаме a_{999} и a_{998} и всички други преди него? (Този въпрос ми беше поставен от Др. Джим Проп.)

ПО-НАТАТЪК: Има много хора, които се интересуват то задачи, свързани със степените на числото две, числото три, както и числото три втори. Вижте например статията на Тери Тао от 2011 година: https://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/.

ВЪПРОС 6: БРОЕНЕ НА ЕКСПЛОЗИИ

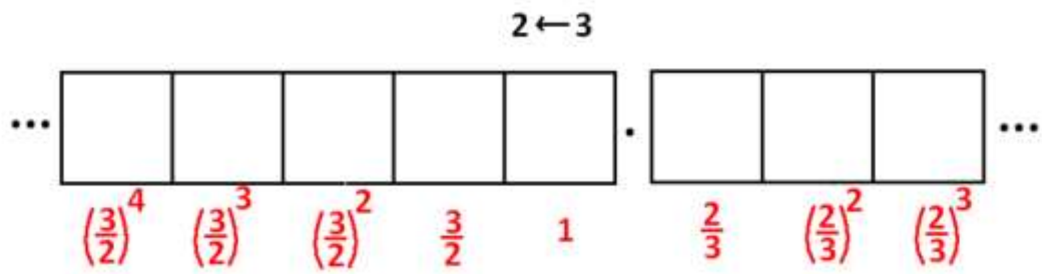
Следната таблица показва общия брой експлозии, които се случват в $2 \leftarrow 3$ машината, за да се получи кодът на всеки от първите четиридесет числа.

		Number of Explosions					
0	0						
1	0	2102	6	21220	14	212021	23
2	0	2120	7	21221	14	212022	23
20	1	2121	7	21222	14	212210	25
21	1	2122	7	210110	19	212211	25
22	1	21010	11	210111	19	212212	25
210	3	21011	11	210112	19	2101100	31
211	3	21012	11	212000	22	2101101	31
212	3	21200	13	212001	22	2101102	31
2100	6	21201	13	212002	22	2101120	32
2101	6	21202	13	212020	23	2101121	32

Забелязвате ли някакви закономерности?

ВЪПРОС 7: РАЦИОНАЛНИ ДЕСЕТИЧНИ РАЗШИРЕНИЯ

Време е да помислим как биха изглеждали “десетичните дроби” в една $2 \leftarrow 3$ машина.



Ето как изглежда $\frac{1}{2}$ като “десетична дроб” в тази бройна система. (Направете делението $1 \div 2$.)

1/2 = 0.01 000001 001 001 01 0000000001 0000001 0001 0000001 001 001 01 ...

(Имате ли места за избор докато делите? Това представяне единствено ли е?)

Ето още няколко места след “десетичната” точка.

1/2 = 0. 01 000001001 001010000000000100000010001 0000001 001001 01 0000000000010001001 0000001001 000001 00001000
0001 0001 0001 000001001 0000100000000100000001 001000001 0001 00001001 0001 000001000001001 001001 001 0000100
01 0000000000010000001 000001 0010100000010100000 1001 0001001 0001 0001 0010000000001 000000100000000001 00000
01 000000001001 00000001000001000 1001001 0000100010100000000000000001000000001 0001 00000010000001 0001 0
01 0010001000001 0001001 000000100001 001 001001 0010000010010000000001 00100000000010001001 001001 0001000100
100000100001 00000001...

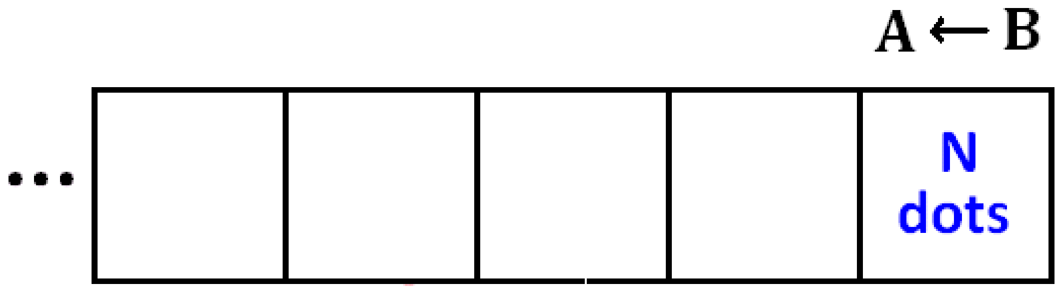
Може ли $\frac{1}{2}$ да има повтарящо се “десетично” представяне в една $2 \leftarrow 3$ машина?

Какво е едно “десетично” представяне на числото $\frac{1}{3}$ в тази машина?

Разработете обща теория за това кои дроби имат повтарящи се “десетични” представяния в $2 \leftarrow 3$ машината. (Аз лично не знам да съществува такава!)

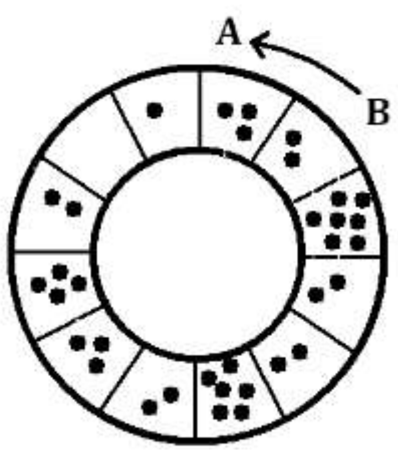
ЩУРА ИДЕЯ 2: РЕДЪТ ИМА ЛИ ЗНАЧЕНИЕ?

Докажете, че редът, в който човек извършва експлозиите в една $1 \leftarrow 10$ машина, без десетичните дроби (или изобщо в една $A \leftarrow B$ машина), няма значение. Тоест, за даден брой точки, поставени в една машина, общият брой на експлозиите, които се случват, ще бъде един и същ, както и крайното разпределение на точките ще бъде едно и също, независимо от реда, в който се извършват експлозиите.



Подсказка: Общият брой на точките в най-дясната кутия е фиксиран и значи общият брой на експлозиите, които ще се случат в тази кутия също е фиксиран. Това означава, че общият брой на точките, които ще се появят във втората кутия също е фиксиран и значи общият брой експлозии, които ще се случат във втората кутия също е фиксиран. И така нататък.

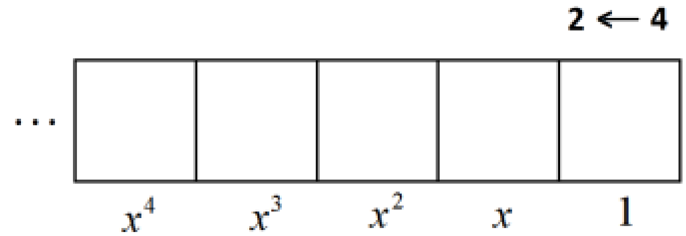
Въпрос: Доказателството, което скицирах разчита на това, че машината има дясна граница. Ако вместо това машините бяха кръгли, то аз не знам дали реда на експлозиите има значение. Може би си струва да си поиграете с тази идея! (Кога можем да сме сигурни, че точките в края на краищата ще се озоват в стабилно разпределение?)



ЩУРА ИДЕЯ 3: ДВОИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА? ТРОИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА?

ДВОИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА И ДВОИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА

a) Уверете се, че една $2 \leftarrow 4$ машина е една машина с база две. (Тоест, обяснете защо $x = 2$ е подходящата стойност за x в картинката по-долу.)

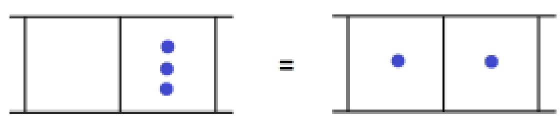


b) Запишете числата от 1 до 30, както ви ги дава $2 \leftarrow 4$ машината и както ви ги дава $1 \leftarrow 2$ машината.

c) Изглежда ли да има лесен начин да превърнем кодовете от едното представяне в другото?

(Изследвайте представянията в $3 \leftarrow 6$ и $5 \leftarrow 10$ машините?)

А сега разгледайте една $1|1 \leftarrow 3$ машина. В нея три точки в една кутия биват заменени с две точки: една в първоначалната кутия и една в кутията едно място по-наляво. (Яко!)



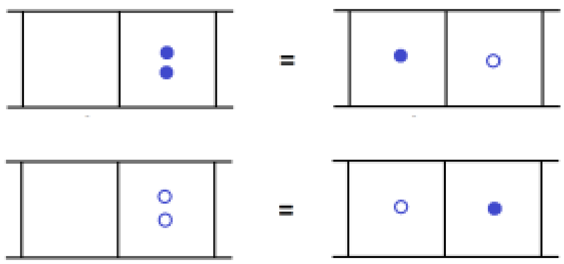
d) Проверете, че една $1|1 \leftarrow 3$ машина също е машина с база две.

e) Запишете числата от 1 до 30, както ви ги дава $1|1 \leftarrow 3$ машината. Има ли лесен начин да превърнете $1|1 \leftarrow 3$ представянето на едно число в неговото $1 \leftarrow 2$ представяне и обратно?

ЗАБАВЕН ВЪПРОС: Какво е “десетичното” представяне на дробта $\frac{1}{3}$ във всяка от тези машини? Как изглежда делението на големи числа във всяка от тях?

ЕДНА РАЗЛИЧНА ТРОИЧНА БРОЙНА СИСТЕМА

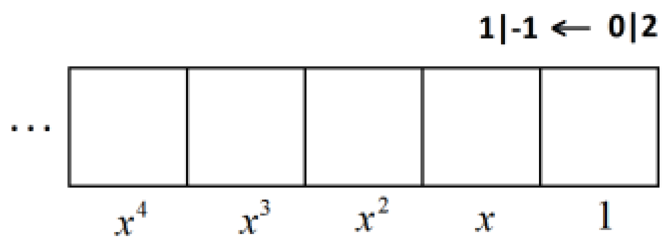
А ето и един нов тип машина. Тя се казва $1 \mid -1 \leftarrow 0 \mid 2$ машина и работи като заменя две точки в една кутия с една антиточка в тази кутия и с една нормална точка в кутията едно място по-наляво. Тя също така превръща две антиточки в една кутия с една двойка от точка и антиточка.



a) Покажете, че числото двадесет се представя като $1 \mid -1 \mid 1 \mid -1$ в тази машина.

b) Кое число се представя като $1 \mid 1 \mid 0 \mid -1$ в тази машина?

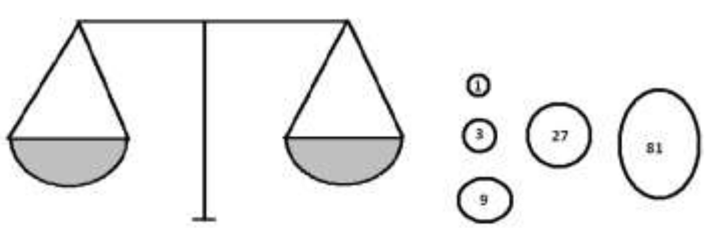
c) Тази машина има базис:



Обяснете защо x е равно на 3.

Следователно $1 \mid -1 \leftarrow 0 \mid 2$ машината показва, че всяко число може да бъде записано като комбинация на степените на числото три чрез коефициентите 1, 0 and -1.

d) Една жена има проста везна и пет камъчета с тежести 1, 3, 9, 27 и 81 грама.



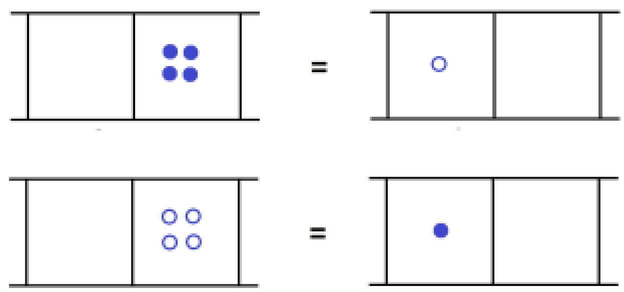
Аз поставям едно камъче, което тежи 20 грама от едната страна на везната. Обяснете как жената може да сложи няколко, или всички, от камъните си на везната, така че да я балансира.

е) Да предположим, че вместо това сложа един 67 -грамов камък на везната на жената. Тя може ли отново да я балансира?

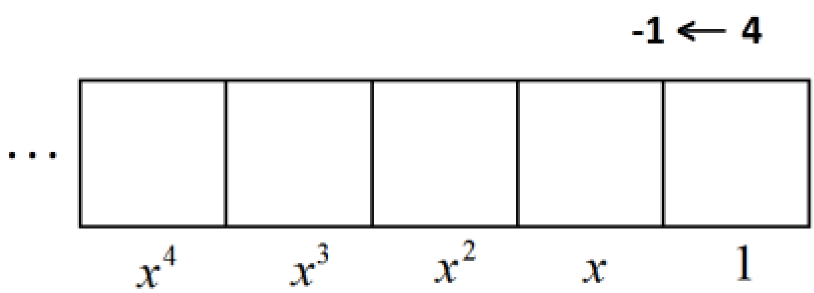
ЩУРА ИДЕЯ 4: ДА СЕ РАЗВИХРИМ НАИСТИНА!

БРОЙНА СИСТЕМА БАЗИРАНА НА МИНУС ЧЕТИРИ

Една $-1 \leftarrow 4$ машина работи като превръща четири точки в една кутия с една антиточка едно място по-наляво (и превръща четири антиточки в една кутия с една нормална точка една кутия по-наляво).



a) Това е една машина с базис:



Обяснете защо x е равно на -4.

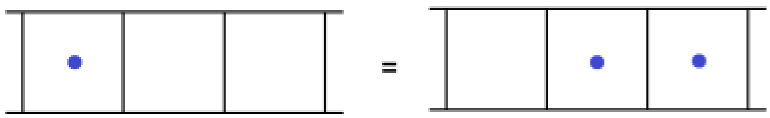
b) Как се представя числото сто в тази машина? Какво е представянето на числото минус сто в тази машина?

c) Уверете се, че $2\,|\,-3\,|\,-1\,|\,2$ е представянето на едно число в тази машина. Кое е числото? Запишете друго представяне на същото число.

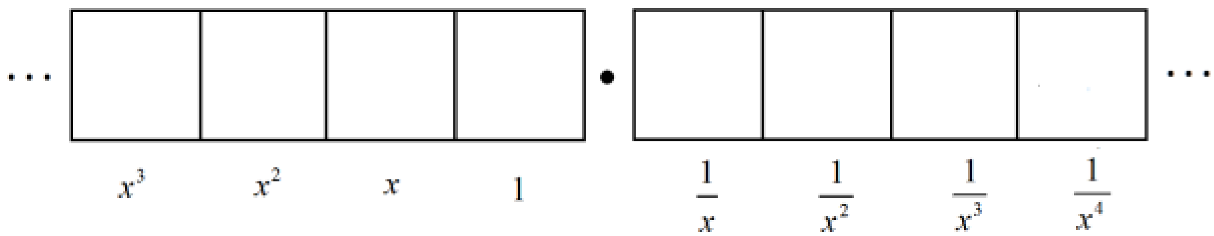
d) Запишете дробта $\frac{1}{3}$ като “десетична дроб” в бройната система с базис -4 чрез извършване на деление в $-1 \leftarrow 4$ машината. Вашият отговор дали е единственият начин да се представи числото $\frac{1}{3}$ в тази бройна система?

БАЗИС ФИ

Да разгледаме изключително странната машина $1|0|0 \leftrightarrow 0|1|1$. В нея две точки в последователни кутии могат да бъдат заменени с една единствена точка едно място по-наляво от тази двойка и, обратно, всяка една точка можем да превърнем в двойка последователни точки в кутиите вдясно.



Понеже тази машина може да се движи както наляво, така и надясно, нека също така ѝ дадем пълната свобода на “десетичните дроби”.



a) Покажете, че, в тази машина, числото 1 може да бъде представено като 0.10101010101…. (То може да бъде представено и само като 1!)

b) Покажете, че числото 2 може да бъде представено като 10.01.

c) Покажете, че числото 3 може да бъде представено като 100.01.

d) Обяснете защо всяко число може да бъде представено само чрез 0ли и 1ци, без да има две последователни 1ци . (**СЛОЖНО:** Тези представяния единствени ли са?)

А сега нека да обсъдим въпроса: *Какъв е базисът на тази машина?*

e) Покажете, че в тази машина, следното равенство $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ е в сила за всяко n.

f) Разделяйки всичко на x^n получаваме, че x трябва да е решение на уравнението $x^2 = x + 1$. Има две числа, които работят. Кое е положителното от тях?

g) Представете числата от 4 до 20 в тази машина без последователни 1ци. Виждате ли закономерности?

СВЪРЗАНО, НО МЕЖДУ ДРУГОТО?

Редицата на Фибоначи се задава по следния начин:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ….

Тя има свойството, че всяко число е сумата на предходните две.

През 1939 година, Едуард Цекендорф доказал (и публикувал през 1972 г.), че всяко естествено число може да бъде записано като сума на числа на Фибоначи, като никои две последователни числа на Фибоначи не се появяват едно след друго в сумата. Например

$$17 = 13 + 3 + 1$$

и

$$46 = 34 + 8 + 3 + 1.$$

(Забележете, че 17 е също така равно на $8+5+3+1$, но това включва две последователни числа на Фибоначи.)

И още, Цекендорф доказал, че представянията са единствени.

Всяко естествено число може да се запише като сума на непоследователни числа на Фибоначи по единствен начин.

Този резултат "мирише", че се основава на някоя машина с някакъв базис.

Има ли начин да построите машина с базис, която да е свързана с числата на Фибоначи по някакъв начин, и която да може да използвате по някакъв начин, за да докажете резултата на Цекендорф?

Забележка: Разбира се, човек може да докаже резултата на Цекендорф и без да използва машини. (За да докажете, че едно число N има представяне на Цекендорф, предприемете "лакома" стратегия: извадете от него най-голямото число на Фибоначи, което е по-малко от N и повторете. За да докажете единствеността, сложете двете предполагаемо различни представяния да са равни едно на друго и съкратете числата на Фибоначи, които съвпадат. Използвайте връзката $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$, за да продължите да съкращавате.) Би било чудесно обаче да видим визуално доказателство на този резултат чрез механиката на машината.

ФИНАЛНИ МИСЛИ

Измислете други щури машини …

Изобретете $a \mid b \mid c \leftrightarrow d \mid e \mid f$ машини за някакви луди числа a, b, c, d, e, f .

Изобретете машина с базис една половина.

Изобретете машина с базис минус две трети.

Изобретете машина, която има едно правило за кутиите на четни позиции и друго различно правило за кутиите на нечетни позиции.

Изобретете машина с базис i или някаква друга машина с комплексни числа.

Как работи делението на големи числа във вашата луда машина?

Как се записва дробта $\frac{1}{3}$ във вашата луда машина?

Имат ли числата единствени представяния или множество представяния във вашата луда машина?

Пощурейте и вижте каква щура математика можете да откриете за себе си и за света!