PUNTOS EXPLOSIVOS
CAPÍTULO 9

MAQUINAS EXTRAÑAS Y SALVAJES

Muy bien. Es hora de volverse loco.

¡Para que reflexionemos, he aquí toda una serie de máquinas peculiares y extrañas, algunas de las cuales producen interrogantes matemáticas desconcertantes hasta hoy no resueltas! Verdaderamente estamos entrando a territorio del pensamiento original y la exploración novedosa. ¡De hecho, cualquier patrón que observen y expliquen podría ser nuevo para el mundo!

¡Así que vuélvanse locos! Jueguen con las diferentes ideas presentadas en este capítulo. Hagan sus propias extensiones y variaciones. ¡Y sobre todo, diviértanse!

IDEA LOCA 1: ¿BASE UNO-Y-MEDIO?

¡Volvámonos locos!

¿Qué piensas sobre una máquina tipo $1\neg\ 1$?
¿Qué pasa cuando le metes un solo punto? ¿Es interesante una máquina $1\neg\ 1$? ¿Utilitaria?

¿Qué piensas de una máquina tipo $2 \leftarrow 1$?
¿Qué pasa cuando le metes un solo punto?
¿Qué piensas de la utilidad de una máquina tipo $2 \leftarrow 1$?

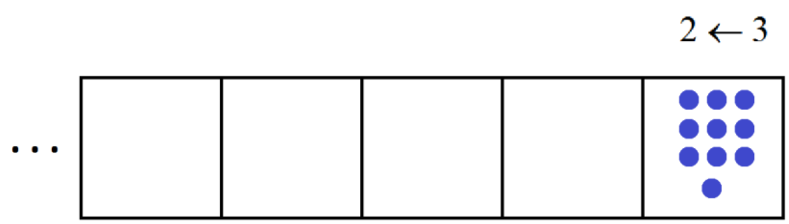
Después de reflexionar por un momento sobre estas máquinas puede que estén de acuerdo en que no hay mucho que decir sobre ellas. Ambas se disparan "hasta el infinito" al colocarles un punto y hay poco control sobre la situación.

¿Qué tal esta entonces?

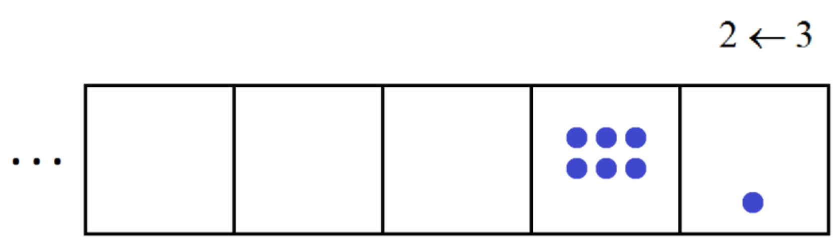
¿Qué piensas de una máquina tipo $2 \leftarrow 3$?
Esta máquina reemplaza tres puntos de una casilla con dos puntos en la casilla a su izquierda.

¡Ah! Ahora estamos en algo. Esta máquina parece hacer cosas interesantes.

Por ejemplo, al meter diez puntos en la máquina

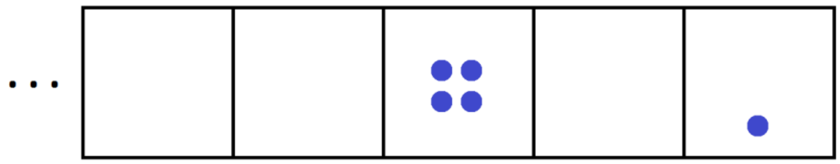


primero produce tres explosiones,



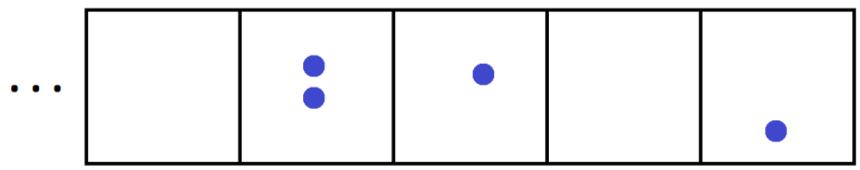
luego otras dos,

$2 \leftarrow 3$



seguida de una más.

$2 \leftarrow 3$



Para el número diez en esta máquina $2 \leftarrow 3$ vemos aparecer el código 2101.

De hecho, aquí están los códigos $2 \leftarrow 3$ para los primeros quince números. (¡Revísenlos!)

1: 1	**6: 210**	**11: 2102**
2: 2	**7: 211**	**12: 2120**
3: 20	**8: 212**	**13: 2121**
4: 21	**9: 2100**	**14: 2122**
5: 22	**10: 2101**	**15: 21010**

Algunas preguntas para empezar:

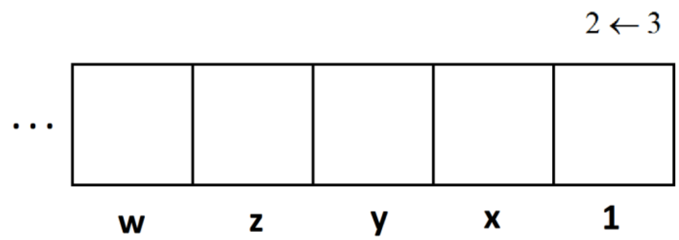
- ¿Hace sentido que sólo aparezcan los dígitos 0, 1 y 2 en estos códigos?
- ¿Hace sentido que los dígitos finales de estos códigos se repitan $1,2,0,1,2,0,1,2,0,\ldots$?
- ¿Se puede hacer aritmética en este sistema extraño? Por ejemplo aquí está como se vería $6+5$. Ciertamente da once, lo cual correspondería al código 2102?

$$\begin{array}{r} 210 \\ +22 \\ \hline 232 \end{array}$$

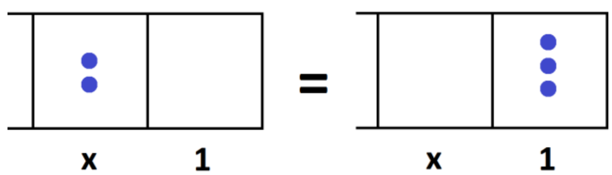
Pero la verdadera interrogante es: ¿Qué son estos códigos? ¿Qué estamos haciendo al representar estos números de esta manera? ¿Estos códigos son valores posicionales en alguna base?

Por supuesto que el título de esta sección delata la respuesta, pero razonemos la matemática de esta máquina.

Los puntos en la extrema derecha, como siempre, valen 1. Llamemos a los puntos en las casillas restantes x, y, z, w, ….

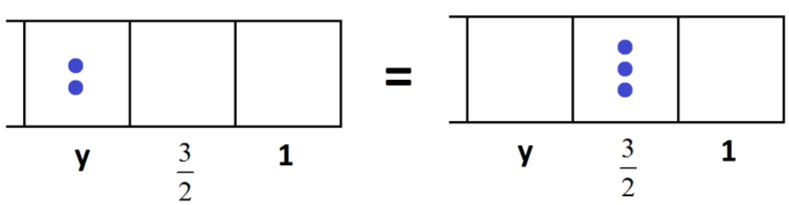


Ahora tres puntos en el lugar de los 1 son equivalentes a dos puntos en el lugar de los x.



Esto nos dice que $2x = 3 \cdot 1$, dando el valor $x = \frac{3}{2}$, uno y medio.

De la misma manera vemos que $2y = 3 \cdot \frac{3}{2}$.



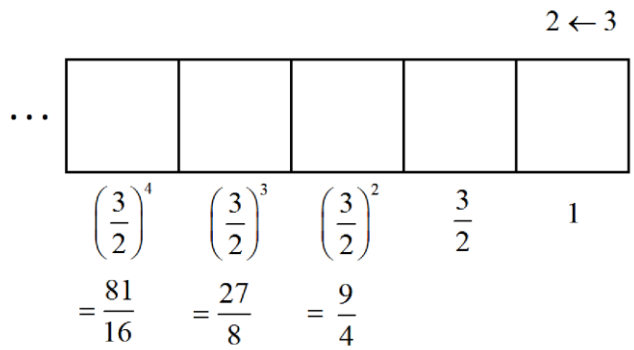
Esto da $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, que es $\frac{9}{4}$.

Y de la misma manera,

$$2z = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ dando } z = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{, que es } \frac{27}{8},$$

$$2w = 3\left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ dando } w = \left(\frac{3}{2}\right)^4, \text{ que es } \frac{81}{16},$$

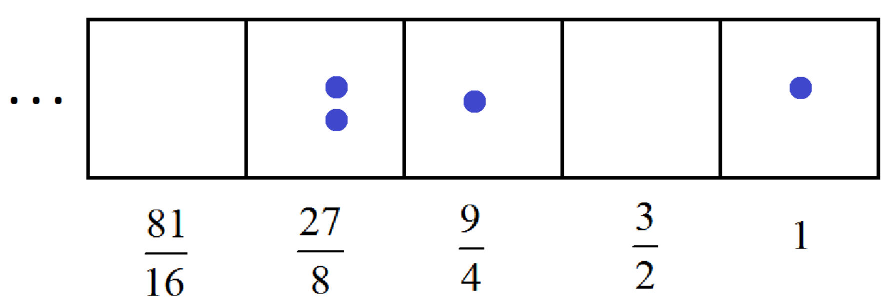
Y así sucesivamente. ¡Estamos trabajando en algo que semeja base uno-y-medio!



Comentario: Los miembros de la comunidad matemática pueda que prefieran no llamar a esto base uno-y-medio en el sentido técnico ya que estamos usando el dígito "2" en nuestro trabajo. Esto va más allá del número de base. Para ver el lenguaje y el trabajo que se está haciendo actualmente en estas líneas, busca "expansiones beta" y "representaciones de no enteros" en Internet. Mientras tanto, entiende que cuando me refiero a "base uno-y-medio " en estas notas realmente quiero decir "la representación de enteros como sumas de uno y medio elevado a la potencia 0, 1 y 2." Es decir, me refiero a las matemáticas que surgen de esta máquina $2 \leftarrow 3$ en particular.

¡Yo personalmente encuentro intuitivamente alarmante esta versión de base uno-y-medio! Estamos diciendo que cada número entero puede ser representado como una combinación de fracciones $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}$, y así sucesivamente. ¡Estas fracciones son espantosas!

Por ejemplo, vimos que el número diez tiene el código 2101.



¿Es cierto que esta combinación de fracciones, $2\times\frac{27}{8}+1\times\frac{9}{4}+0\times\frac{3}{2}+1\times1$, resulta ser el perfecto número entero diez? Sí! Y a eso le digo ¡Woa!

Hay una pila de preguntas posibles relacionadas a los números de esta versión de máquina $2 \leftarrow 3$ en base uno-y-medio, y ¡muchas representan problemas de investigación actual aun sin resolver! Como referencia, aquí están los códigos de los primeros cuarenta números de la máquina $2 \leftarrow 3$ (incluyendo el cero al principio).

0			
1	**2102**	**21220**	**212021**
2	**2120**	**21221**	**212022**
20	**2121**	**21222**	**212210**
21	**2122**	**210110**	**212211**
22	**21010**	**210111**	**212212**
210	**21011**	**210112**	**2101100**
211	**21012**	**212000**	**2101101**
212	**21200**	**212001**	**2101102**
2100	**21201**	**212002**	**2101120**
2101	**21202**	**212020**	**2101121**

PREGUNTA 1: ¿PATRONES?

¿Hay patrones interesantes en estas representaciones?
¿Por qué (después de la primera) todas las representaciones comienzan con el dígito 2?
¿Todas las representaciones de seis y más allá empiezan con 21?
¿Si siguen la lista lo suficientemente lejos, se "estabilizan" los primeros tres dígitos?
¿Qué pueden decir sobre los dígitos finales? Los últimos dos dígitos?

Comentario: el Dr. Jim Propp de UMass Lowell, quien me abrió los ojos a la máquina $2 \leftarrow 3$, sugiere estas preguntas más robustas:

¿Cuáles secuencias pudieran aparecer al comienzo de infinitos códigos de máquina $2 \leftarrow 3$?
¿Cuáles secuencias pudieran aparecer al final de infinitos códigos de máquina $2 \leftarrow 3$?
¿Cuáles secuencias pudieran aparecer en algún lugar en el medio de infinitos códigos de máquina $2 \leftarrow 3$?

PREGUNTA 2: ¿NUMEROS PARES?

Miren la lista de los primeros cuarenta códigos de números en $2 \leftarrow 3$. Puede verse la siguiente "regla de divisibilidad" por tres.

Un número escrito en código $2 \leftarrow 3$ es divisible por tres precisamente cuando el dígito final es cero.

¿Cuál es una regla de divisibilidad por el número dos para números escritos en código $2 \leftarrow 3$? ¿Cuál característica común exhiben cada segundo número?

0			
2	**2120**	**21221**	**212022**
21	**2122**	**210110**	**212211**
210	**21011**	**210112**	**2101100**
212	**21200**	**212001**	**2101102**
2101	**21202**	**212020**	**2101121**

PREGUNTA 3: ¿SINGULARIDAD?

Demuestren que esas representaciones de números enteros en máquina $2 \leftarrow 3$ con dígitos 0, 1 y 2 son únicos.

[Aparte infinitamente: Demuestren que todo número entero se puede escribir de forma única como la suma de potencias no-negativas de $\frac{7}{5}$ usando los coeficientes $0,1,2,3,4,5,6$. Y que todo número entero se puede escribir de forma única como la suma de potencias no-negativas de $\frac{10}{7}$ usando los coeficientes $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Y que todo número entero se puede escribir de forma única como la suma de potencias no-negativas de $\frac{339}{56}$ usando los coeficientes $0,1,2,3,..,338$. ¡Y así sucesivamente!]

PREGUNTA 4: ¿ES UN NUMERO ENTERO?

No toda colección de 0 s, 1s y 2 s representa un código de número entero en una máquina $2 \leftarrow 3$. Por ejemplo, mirando la lista de los primeros cuarenta códigos vemos que nos saltamos el 201. Por lo tanto esa combinación de potencias de uno-y-medio no es un número entero. (Es el número $5\frac{1}{2}$.)

He aquí una pregunta: *Será*

$$2102212020120020122011201102202010221020100202212$$

el código para un número entero en una máquina $2 \leftarrow 3$ *?*

Claro, podemos simplemente calcular la suma de potencias que esto representa y ver si nos resulta o no un número entero. ¡Pero eso no sería nada divertido!

¿Existe alguna forma rápida y eficiente de analizar una secuencia de 0 s, 1s y 2 s y determinar si corresponde o no a un código de número entero? (Claro, cómo definimos "rápido" y "eficiente" es debatible.)

PREGUNTA 5: NUMBERO DE DIGITOS

Miren nuevamente los primeros códigos $2 \leftarrow 3$.

0			
1	2102	21220	212021
2	2120	21221	212022
20	2121	21222	212210
21	2122	210110	212211
22	21010	210111	212212
210	21011	210112	2101100
211	21012	212000	2101101
212	21200	212001	2101102
2100	21201	212002	2101120
2101	21202	212020	2101121

Noten

0 da el primer código de un dígito. (Algunos preferirán llamarlo 1.)
3 da el primer código de dos dígitos.
6 da el primer código de tres dígitos.
9 da el primer código de cuatro dígitos.

Y así sucesivamente.

Esto da la secuencia: **3, 6, 9, 15, 24, ….** (Saltémonos el dudoso comienzo.)

¿Existe algún patrón en esta sucesión?

Si están pensando en Fibonacci, entonces, lamentablemente, se decepcionarán con los pocos números en la sucesión.

$$36, 54, 81, 123, 186, 279, 420, 630, \dots$$

Una Fórmula Recursiva.

Digamos que a_N representa el N avo número en esta sucesión, dejando 1 como la primera solución de un dígito. Es sabido que

$$a_{N+1} = \begin{cases} \dfrac{3a_N}{2} & \text{if } a_N \text{ is even} \qquad \text{(par)} \\ \dfrac{3(a_N+1)}{2} & \text{if } a_N \text{ is odd.} \qquad \text{(impar)} \end{cases}$$

(Si se requieren m puntos en la casilla de la extrema derecha para obtener un código de N dígitos de largo, ¿cuántos puntos debemos reemplazar en la máquina $2 \leftarrow 3$ para garantizar que m puntos aparecerán en la siguiente casilla? Esto entonces nos daría un código de $N+1$ dígitos de largo.)

¿Una Fórmula Explícita?

¿Existirá una fórmula explícita para a_N ? ¿Será posible calcular a_{1000} sin tener que calcular a_{999} y a_{998} y todos los anteriores? (Esta pregunta fue formulada por el Dr. Jim Propp.)

MAS ALLA: Hay mucho interés en problemas que involucran potencias de dos, y tres, y tres-medios. Vean por ejemplo el trabajo de Terry Tao del 2011 https://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/.

PREGUNTA 6: CONTANDO EXPLOSIONES

La siguiente tabla muestra el número de explosiones que ocurren en la máquina $2 \leftarrow 3$ para obtener el código para cada uno de los primeros cuarenta números.

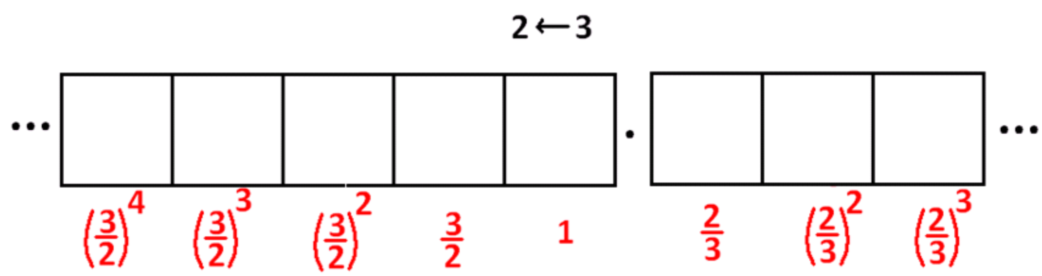
Number of Explosions

0	0						
1	0	2102	6	21220	14	212021	23
2	0	2120	7	21221	14	212022	23
20	1	2121	7	21222	14	212210	25
21	1	2122	7	210110	19	212211	25
22	1	21010	11	210111	19	212212	25
210	3	21011	11	210112	19	2101100	31
211	3	21012	11	212000	22	2101101	31
212	3	21200	13	212001	22	2101102	31
2100	6	21201	13	212002	22	2101120	32
2101	6	21202	13	212020	23	2101121	32

¿Algún patrón?

PREGUNTA 7: EXPANSIONES DECIMALES RACIONALES

Nos podemos ir a los “decimales” en una máquina $2 \leftarrow 3$.



He aquí cómo se ve $\frac{1}{2}$ como un "decimal" en esta base. (Trabaja la división $1 \div 2$.)

1/2 = 0.01 000001 001 001 01 0000000001 0000001 0001 0000001 001 001 01 ...

(¿Tenemos opciones a lo largo del camino? ¿Es única esta representación?)

He aquí algunos "decimales" más.

1/2 = 0. 01 000001001 00101000000000010000000100001 0000001 001001 01 0000000000010001001 0000001001 000001 00001000
0001 0001 0001 000001001 000010000000010000000001 001000001 0001 00001001 0001 000001000001001 001001 001 0000100
01 000000000001000001 000001 0010100000001010000001001 0001001 0001 0001 0010000000001 0000001000000001 00000
01 000000001001 00000001000001000100 1001 000010001010000000000000001000000001 0001 0000001000000001 0001 0
01 001000100001 0001001 000000100001 001 001001 00100000100100000001 0010000000001000 1001 001001 0001000100
1000001000001 00000001...

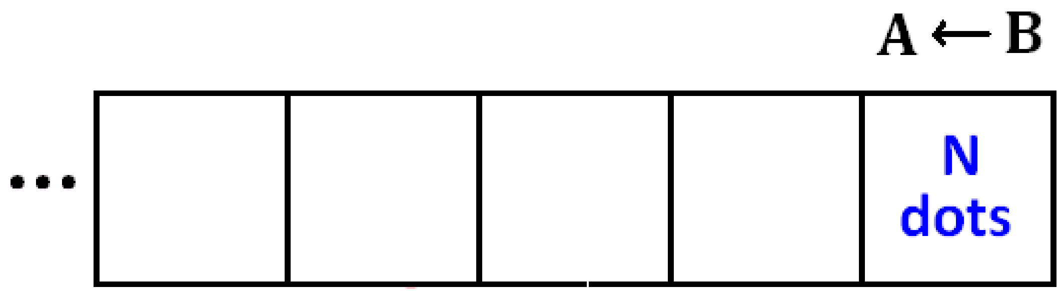
¿Puede $\frac{1}{2}$ tener un "decimal" repetitivo como representación en una máquina $2 \leftarrow 3$?

¿Cuál sería una representación "decimal" para $\frac{1}{3}$ en esta máquina?

Desarrollen una teoría general acerca de cuáles fracciones tienen representación "decimal" repetitiva en una máquina $2 \leftarrow 3$. (¡Yo personalmente no tengo una!)

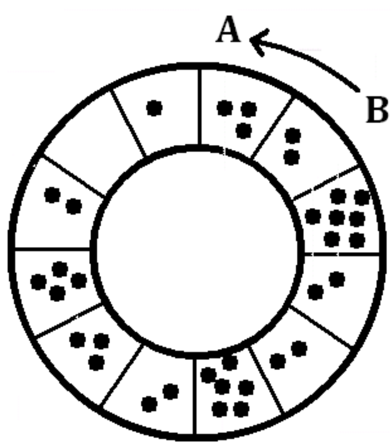
IDEA LOCA 2: ¿IMPORTA EL ORDEN?

Demuestren que el orden en el que se llevan a cabo la explosiones en una máquina $1 \leftarrow 10$ sin decimales (o de hecho, para cualquier máquina $A \leftarrow B$), no importa. Es decir, que para una cantidad dada de puntos colocados en la máquina, el número total de explosiones será siempre el mismo y la distribución final de los puntos será siempre la misma, sin importar el orden en el cual escojamos conducir esas explosiones.



Pista: El número total de puntos en la casilla de la extrema derecha está dado y por lo tanto el número de explosiones que ocurren ahí también está determinado. Esto quiere decir que el número de puntos que aparecen en la segunda casilla también está dado, y entonces el número de explosiones que ocurren ahí también está predeterminado. Y así sucesivamente.

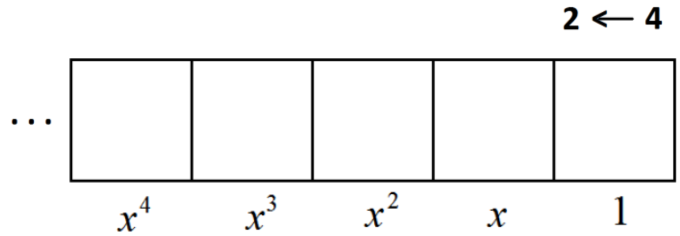
Pregunta: La prueba que he delineado se basa en el hecho de que la máquina está limitada por la derecha. Si las máquinas fueran circulares, entonces no sé si importaría el orden de las explosiones. ¡Valdría la pena jugar con esto! (¿Cuándo podemos estar seguros de que eventualmente los puntos caerán en una distribución estable?)



IDEA LOCA 3: ¿BASE DOS? ¿BASE TRES?

BASE DOS Y BASE TRES

a) Verifiquen que una máquina $2 \leftarrow 4$ es una máquina de base dos. (Es decir, expliquen por qué $x = 2$ es el valor apropiado para x en el siguiente dibujo.)

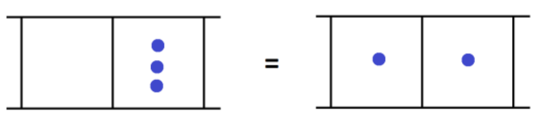


b) Escriban los números del 1 al 30 dados por una máquina $2 \leftarrow 4$ y dados por una máquina $1 \leftarrow 2$.

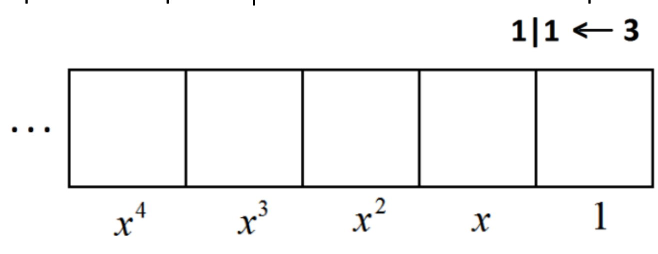
c) ¿Existe una forma aparentemente sencilla de convertir la representación de un número al otro?

(¿Exploren las representaciones en máquinas $3 \leftarrow 6$ y $5 \leftarrow 10$ también?)

Ahora consideren la máquina $1|1 \leftarrow 3$. Aquí tres puntos en una casilla son reemplazados por dos puntos: uno en la casilla de origen y uno un puesto a su izquierda. (¡Extraño!)



d) Verifiquen que una máquina $1|1 \leftarrow 3$ es también una máquina de base dos.

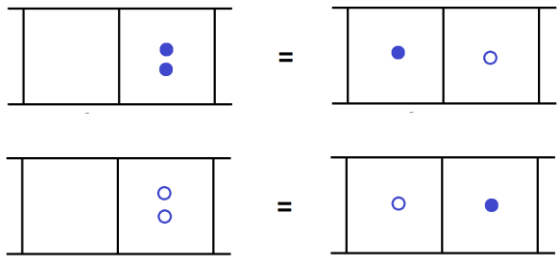


e) Escriban los números del 1 al 30 tal como los da una máquina $1|1 \leftarrow 3$. Existe una manera fácil de convertir las representación de un número $1|1 \leftarrow 3$ en su representación $1 \leftarrow 2$, y viceversa?

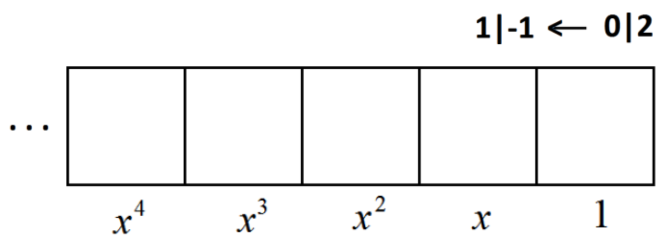
PREGUNTA DIVERTIDA: ¿Cuál es la representación "decimal" de la fracción $\frac{1}{3}$ en cada una de estas máquinas? ¿Cómo funciona la división larga en estas máquinas?

UNA BASE TRES DIFERENTE

He aquí un tipo diferente de máquina en cierta base. Se llama la máquina $1\ |-1 \leftarrow 0\ |\ 2$ y opera convirtiendo dos puntos de cualquier casilla en un anti-punto en esa casilla y un punto normal un puesto a su izquierda. También convierte dos anti-puntos de una casilla en un par anti-punto/punto.



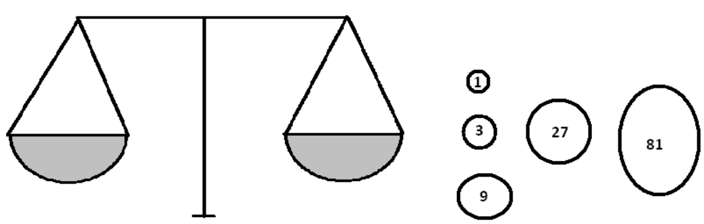
a) Demuestren que en esta máquina el número veinte tiene esta representación $1|-1|1|-1$.
b) ¿Cuál número tiene esta representación $1|1|0|-1$ en esta máquina?
c) Esta máquina es una máquina de base:



Expliquen por qué x es igual a 3.

Entonces la máquina $1\ |-1 \leftarrow 0\ |\ 2$ muestra que todo número puede ser escrito como una combinación de potencias de tres usando los coeficientes $1,\ 0$ y -1.

d) Una mujer tiene una balanza simple y cinco piedras que pesan $1,\ 3,\ 9,\ 27$ y 81 libras.



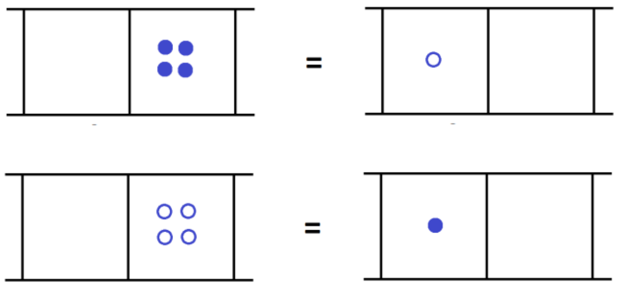
Coloco en una lado de la balanza una piedra de 20 libras. Expliquen de qué manera la mujer puede colocar algunas, o todas, sus piedras en la balanza de manera que quede balanceada.

e) Supongan en vez que coloco una roca de 67 libras en la balanza de la mujer. ¿Puede balancear esa piedra también?

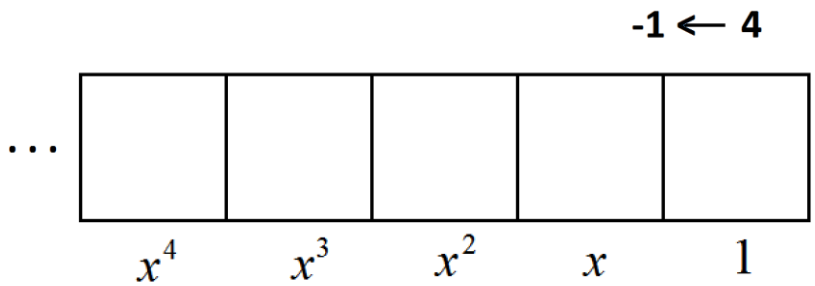
IDEA LOCA 4: ¡VOLVIENDONOS REALMENTE SALVAJES!

BASE MENOS CUATRO

Una máquina $-1 \leftarrow 4$ opera convirtiendo cuatro puntos de cualquier casilla en un anti-punto un puesto a su izquierda (y convierte cuatro anti-puntos de una casilla en un punto un lugar a la izquierda).



a) Esta máquina es una máquina de base



Expliquen por qué x equivale a -4.

b) ¿Cuál es la representación del número cien en esta máquina? ¿Cuál es la representación del número menos cien en esta máquina?

c) Verifiquen que $2\,|\,{-3}\,|\,{-1}\,|\,2$ es la representación de algún número en esta máquina. ¿Cuál número? Escriban otra representación para este mismo número.

d) Ejecuten la división larga en máquina $-1 \leftarrow 4$ para escribir la fracción $\frac{1}{3}$ como un "decimal". Es su respuesta la única forma de representar $\frac{1}{3}$ en esta base?

BASE MENOS DOS

Consideren una máquina extraña (inventada por el Dr. Dan V.) que sigue la regla $1|1|0 \leftarrow 0|0|2$. En ella, un par de puntos en cualquier casilla son reemplazados por dos puntos consecutivos justo a su izquierda.

Colocan un punto y obtienen el código 1.
Colocan dos puntos y obtienen el código 110.
Tres puntos producen el código 111.
Cuatro puntos dan $112 = 220 = 1300 = 12100 = 120100 = 1200100 = 12000100 = \cdots$. Tenemos una cadena infinita.

a) Demuestren que esta máquina es una máquina de base menos dos.
b) Demuestren que un punto seguido de dos puntos en cualquier lugar en esta máquina tienen un valor combinado de cero.

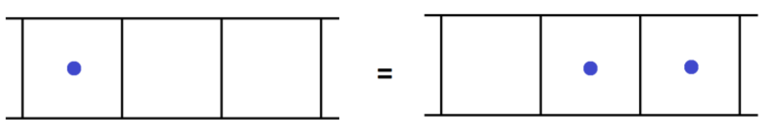
Entonces, en esta máquina, podemos eliminar del código todos los $1|2$ s que veamos. En consecuencia, hay una código muy bien definido para cuatro puntos, a saber, 100.

c) ¿Cuáles son los códigos de máquina $1|1|0 \leftarrow 0|0|2$ para los números del cinco al veinte?

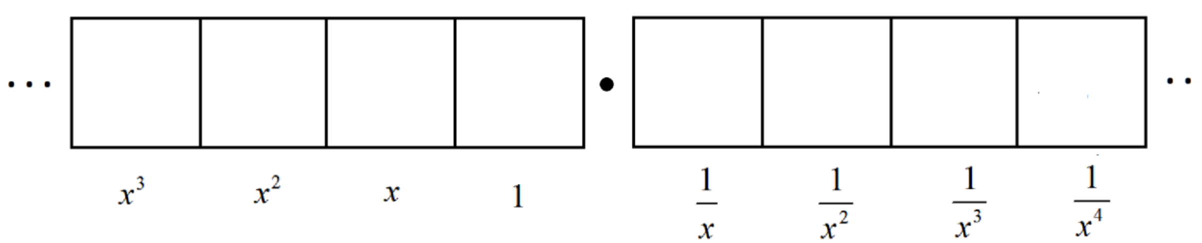
Extra: Jueguen con una máquina $1|1|0 \leftarrow 0|0|3$. (¿En cuál base está?)

BASE PHI

Consideren otra máquina extraña $1|0|0 \leftrightarrow 0|1|1$. En ella dos puntos en casillas consecutivas pueden ser reemplazados por un único punto un puesto a la izquierda del par y, a la inversa, cualquier punto único puede ser reemplazado por un par de puntos consecutivos a su derecha.



Como esta máquina puede moverse tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, démosle también su rango "decimal".



a) Demuestren que, en esta máquina, el número 1 puede ser representado como 0.10101010101…. (¡También puede ser representado simplemente como 1!)

b) Demuestren que el número 2 puede ser representado como 10.01.

c) Demuestren que el número 3 puede ser representado como 100.01.

d) Expliquen por qué cada número puede ser representado en términos de 0s y 1s sin 1s consecutivos. (**DIFICIL:** ¿Son únicas estas representaciones?)

Enfoquémonos ahora en esta pregunta: *¿En cuál base está esta máquina?*

e) Demuestren que en esta máquina necesitamos que $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ para todos los n.

f) Dividir todo por x^n nos dice que x debe ser un número que satisface $x^2 = x + 1$. Hay dos números que funcionan. ¿Cuál es el número positivo que funciona?

g) Representen en esta máquina los números 4 al 20 sin 1s consecutivos. ¿Algunos patrones?

RELACIONADO

Los números Fibonacci están dados por:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ….

Tienen la propiedad de que cada número es la suma de los dos términos anteriores.

En 1939, Edouard Zeckendorf demostró (y luego en 1972 publicó) que todo número entero positivo puede escribirse como la suma de números Fibonacci sin que aparezca Fibonacci consecutivo alguno en la suma. Por ejemplo:

$$17 = 13 + 3 + 1$$

y

$$46 = 34 + 8 + 3 + 1.$$

(Noten que 17 también es igual a $8 + 5 + 3 + 1$ pero eso involucra números Fibonacci consecutivos.)

Además, Zeckendorf demostró que las representaciones son únicas.

Cada entero positivo puede escribirse exactamente de una sola manera como la suma de números Fibonacci no consecutivos.

Este resultado nos da “la sensación” de máquina base en su base.

Construyan una máquina base relacionada de alguna manera con los números Fibonacci y úsenla para establecer el resultado de Zeckendorf.

Comentario: Por supuesto, uno puede demostrar el resultado de Zeckendorf sin la ayuda de una máquina base. (Para demostrar que un número N tiene una representación Zeckendorf, adopten un método "codicioso": réstenle el número Fibonacci más pequeño a N, y repitan. Para demostrar que es único, igualen dos representaciones supuestamente diferentes del mismo número y cancelen los números Fibonacci que aparezcan a ambos lados. Usen la relación $F\left(n+2\right) = F(n+1) + F(n)$ para continuar cancelando.)

PENSAMIENTOS DE CLAUSURA

Inventen otras máquinas locas…

Inventen máquinas $a \mid b \mid c \leftrightarrow d \mid e \mid f$ para los números salvajes a, b, c, d, e, f .

Inventen una máquina de base un medio.

Inventen una máquina de base menos dos tercios.

Inventen una máquina que tiene una regla para casillas en posiciones pares y otra regla diferente para casillas en posiciones impares.

Inventen una máquina de base i o de algún otro número complejo.

¿Qué tal funciona la división larga en sus máquinas locas?

¿Qué da la fracción $\frac{1}{3}$ en su máquina loca?

En sus máquinas los números tienen representaciones únicas o múltiples?

¡Vuélvanse locos y vean qué matemática loca pueden descubrir!