Puntos Explosivos
CAPITULO 3

ADICION Y MULTIPLICACION

A la sociedad le encanta trabajar en base diez. Por tanto quedémonos por un rato con la máquina $1 \leftarrow 10$ y démosle sentido a la aritmética que aprendemos típicamente en la escuela.

Acabamos de ver cómo se escriben los números. Usualmente le sigue aprender a sumarlos.

Empecemos por explorar la adición, y sigamos luego a partir de allí.

ADICION

He aquí un problema de adición: Calcula $251+124$. Normalmente este tipo de problema se plantea así.

$$\begin{array}{r} 251 \\ +\ 124 \\ \hline \end{array}$$

Este problema de adición es fácil de computar: $2+1$ es 3, $5+2$ es 7, and $1+4$ es 5. La respuesta que aparece es 375.

$$\begin{array}{r} 251 \\ +\ 124 \\ \hline 375 \end{array}$$

¿Notaste algo curioso? Trabajé de izquierda a derecha y tal como me enseñaron a leer. Esto es lo opuesto a lo que usualmente se le enseña a hacer a la mayoría de las personas en clase de matemáticas: ir de derecha a izquierda. A pesar de haber ido en la dirección opuesta, nuestra respuesta 375 es correcta. (Compruébalo: ¿obtienes la misma respuesta si trabajas en la otra dirección?)

¿Entonces por qué nos enseñan a trabajar de derecha a izquierda en clase de matemáticas?

Muchos sugieren que el problema que acabamos de resolver es “demasiado amigable”. Deberíamos intentar un suma más rebuscada, como ésta $358+287$.

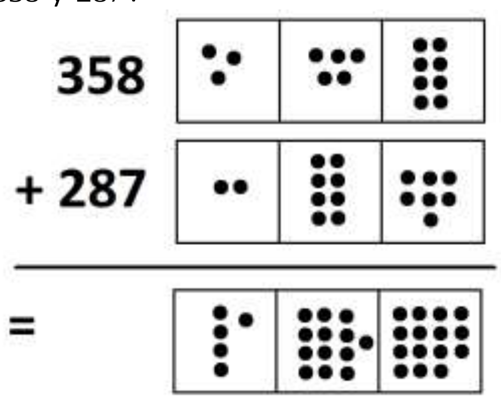
$$\begin{array}{r} 358 \\ +\,287 \\ \hline \end{array}$$

Bueno. ¡Hagámoslo!

Si vamos de nuevo de izquierda a derecha tenemos que $3+2$ es 5; $5+8$ es 13 y $8+7$ es 15. Aparece la respuesta “cinco cienes trece dieces y quince”.

$$\begin{array}{r} 358 \\ +\,287 \\ \hline 5\,|\,13\,|\,15 \end{array}$$

¡Esta respuesta es matemáticamente absolutamente correcta! En una máquina $1 \leftarrow 10$ puedes ver que es así . Aquí están 358 y 287.



5 | 13 | 15

Efectivamente la suma de 3 cienes y 2 cienes resulta en 5 cienes.
Efectivamente la suma de 5 dieces y 8 dieces resulta en 13 dieces.
Efectivamente la suma de 8 unos y 7 unos resulta en 15 unos.

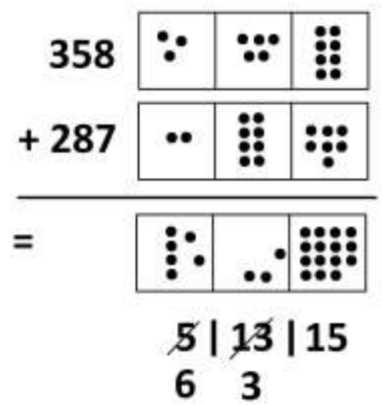
La respuesta “cinco cienes trece-dieces y quince” es absolutamente correcta – y hasta lo dije correctamente. Realmente tenemos 5 cienes, 13 dieces, y 15 unos. Matemáticamente esta respuesta no contiene ningún error. Es sólo que suena extraña. La sociedad prefiere que no digamos los números de esta manera.

Entonces la pregunta ahora es:

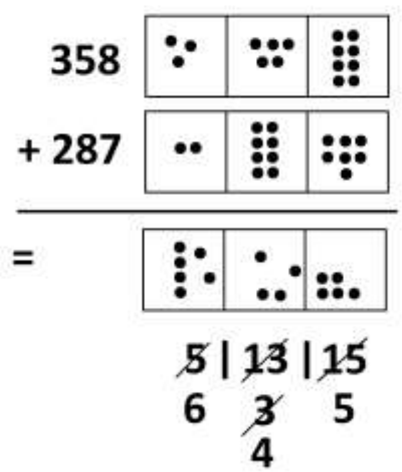
Podemos arreglar esta respuesta en beneficio de la sociedad – no en beneficio de las matemáticas – sino únicamente en beneficio de la sociedad?

¡La respuesta es que sí! Podemos generar algunas explosiones. (Al fin y al cabo ésta es una máquina $1 \leftarrow 10$).

Explotemos diez puntos de la casilla del medio y reemplacémoslos con un punto en la casilla a su izquierda.



Aparece la respuesta “seis cienes tres dieces quince”. Esta sigue siendo una respuesta encantadora y matemáticamente correcta. Sin embargo la sociedad en general puede que no esté de acuerdo. Hagamos otra explosión: diez puntos de la primera casilla a la derecha.



Ahora vemos la respuesta “seis cienes 4 dieces cinco,” la cual es una que la sociedad entiende. (Aunque en Español, cuatro dieces se dice cuarenta).

Aquí van algunos problemas de práctica que quizás quieras o no intentar. Mis soluciones a ellos aparecen al final del capítulo.

1. Escribe las respuestas a las siguientes sumas trabajando de izquierda a derecha ¡sin importar qué pueda pensar la sociedad! Luego, haz algunas explosiones para traducir cada respuesta a algo que la sociedad entienda.

$$\begin{array}{r} 148 \\ +\ 323 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 567 \\ +\ 271 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 377 \\ +\ 188 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 582 \\ +\ 714 \\ \hline = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 310462872 \\ +\ 389107123 \\ \hline = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 87263716381 \\ +\ 18778274824 \\ \hline = \end{array}$$

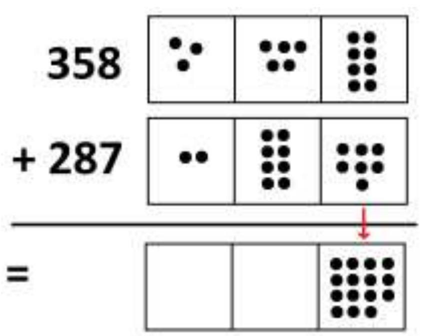
El ALGORITMO TRADICIONAL

¿Cómo se compara este método de adición con puntos y casillas con el algoritmo que la mayoría de la gente conoce?

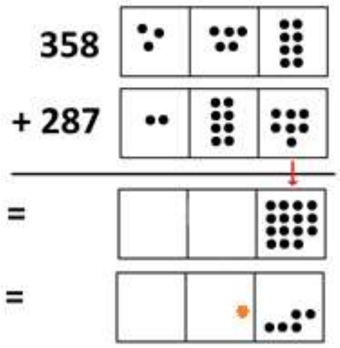
Volvamos al ejemplo $358+287$. La mayoría de la gente se sorprende (quizás hasta se perturbe) con la sencillez de la respuesta tipo izquierda-a-derecha como $5|13|15$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ +\ 287 \\ \hline 5|13|15 \end{array}$$

Eso es porque en el algoritmo tradicional nos tienen trabajando de derecha a izquierda atendiendo primero al $8+7$.

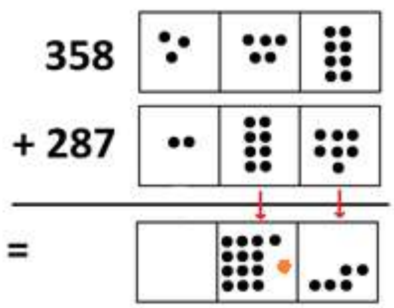


Pero en el algoritmo no escribimos 15. En su lugar, explotamos de una vez diez de los puntos y escribimos 5 bajo la línea de respuesta y a la vez un pequeño 1 encima de la siguiente casilla del medio. A esto la gente le llama *correr el uno* – correctamente – sumar un punto más a la posición de los dieces.

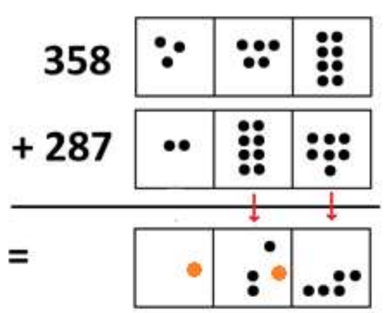


$$\begin{array}{rrrr} & & 1 & \\ & 3 & 5 & 8 \\ + & 2 & 8 & 7 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

Ahora atendemos las casillas del medio. La suma da 14 puntos en la casilla de los dieces ($5+8$ da trece puntos, más el punto adicional proveniente de la explosión anterior).



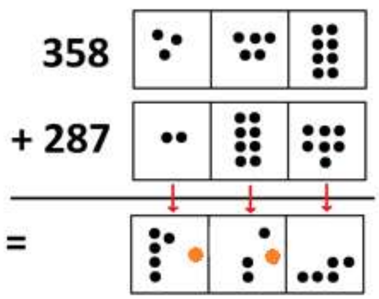
Ejecutamos otra explosión.



$$\begin{array}{rrrr} & 1 & 1 & \\ & 3 & 5 & 8 \\ + & 2 & 8 & 7 \\ \hline & & 4 & 5 \end{array}$$

Sobre el papel escribimos “4” en la posición de los dieces, con un pequeño “1” sobre la siguiente columna. Esto coincide precisamente con la idea que nos da la imagen de los puntos-y-casillas.

Y ahora terminamos el problema sumando los puntos en la posición de los cienes.



$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1} \\ 358 \\ +\,287 \\ \hline 645 \end{array}$$

Así que el algoritmo tradicional funciona de derecha a izquierda haciendo explosiones (y “corriendo”) a medida que avanza. Sobre el papel es rápido y compacto y puede que sea la razón por la cual ha sido la forma de realizar adiciones favorecida por siglos.

El método de los puntos explosivos funciona de izquierda a derecha así como aprendemos a leer, y deja todas las explosiones para el final. Es fácil de entender y divertido.

Por supuesto que ambos métodos son buenos y correctos. Cuál de ellos decidas usar es sólo cuestión de gusto y estilo personal. (¡Y siéntete en libertad de inventar tu propio método bueno y correcto también!)

MULTIPLICACION

Sigamos jugando con la máquina $1 \leftarrow 10$. Y hagamos un problema de multiplicación… ¡ahora mismo!

Tienes menos de tres segundos para escribir una respuesta rápida y absolutamente correcta para este problema de multiplicación. ¿Cuál sería una respuesta acertada?

26417 x 3

¿Puedes ver que $6\,|\,18\,|\,12\,|\,3\,|\,21$, es decir, “seis diez miles, dieciocho miles, doce cienes y tres dieces veintiuno,” es correcto y resuelve rápidamente?

Aquí está lo que pasa.

Empecemos con el esquema de 26417 en una máquina $1 \leftarrow 10$. (¿está bien si escribo los números en lugar de pintar los puntos?)

2	6	4	1	7

Nos piden que tripliquemos este número.

2	6	4	1	7	x 3

Tenemos 2 diez mil. Si los triplicamos, tendríamos 6 diez mil.
Tenemos 6 mil, y en triplicado sería 18 mil.
También, 4 cienes se convierten en 12 cienes; diez se transforman en 3 dieces; y 7 unos se convierten en 21 unos.

6	18	12	3	21

Observamos el resultado “sesenta dieciocho mil, doce cienes y treinta veintiuno”.
¡Absolutamente sólido y matemáticamente correcto!

Ahora, ¿Cómo podemos acomodar esta respuesta para la sociedad?

¡Hagamos algunas explosiones, por supuesto!

Pareciera que podemos hacer las explosiones en cualquier orden que queramos. ¿Puedes seguir esta cadena de eventos?

$$6|18|12|3|21 = 6|19|2|3|21 = 6|19|2|5|1 = 7|9|2|5|1$$

Aparece la respuesta 79251 .

2. Calcula cada una de las siguientes: 26417×4 , 26417×5 y 26417×9 .

Calcula 26417×10 y explica por qué la respuesta ha de ser 264170 . (Este resultado se parece el número original con un cero clavado al final)

Extra: Te animas a calcular 26417×11 y 26417×12 también? (La respuesta puede ser “¡No! ¡No lo quiero hacer!)

MULTIPLICANDO POR DIEZ

De hecho, contestemos una de las preguntas de práctica aquí. *¿Por qué la respuesta a* 26417×10 *se* parece al número original con un cero clavado al final*?*

Recuerdo que me enseñaron esta regla en la escuela: para multiplicar por diez coloca un cero al final. Por ejemplo,

$$37 \times 10 = 370$$
$$98989 \times 10 = 989890$$
$$100000 \times 10 = 1000000$$

y así sucesivamente.

Esta observación hace perfecto sentido dentro del razonamiento tipo puntos-y-casillas.

He aquí de nuevo el número 26417 en una máquina $1 \leftarrow 10$.

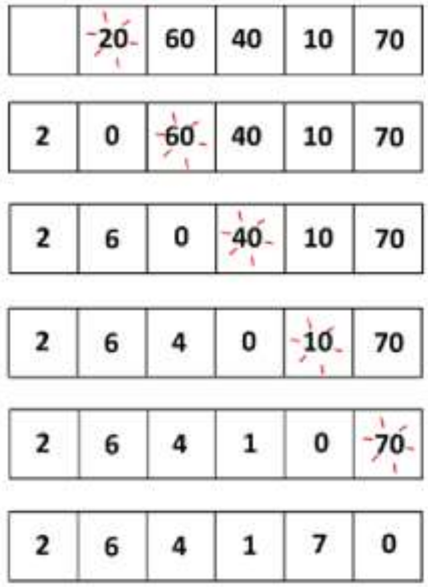
2	**6**	**4**	**1**	**7**

Aquí esta 26417×10.

20	**60**	**40**	**10**	**70**

Hagamos las explosiones, una a la vez. (Necesitaremos otra casilla a la izquierda.)

Tenemos que 2 grupos de diez explotan y generan 2 puntos en la casilla a la izquierda, y 6 grupos de diez explotan y generan 6 puntos en la casilla a la izquierda, y 4 grupos de diez explotan y generan 4 puntos en la casilla a la izquierda, y así sucesivamente. Los dígitos con los cuales trabajamos quedan iguales. De hecho, el efecto neto de lo que vemos es que todos los dígitos se trasladan un puesto a la izquierda para dejar cero puntos en la posición de los unos.



Efectivamente, parece que acabamos de ponerle un cero al final a 26417. (Pero claro es por tantas explosiones.)

3. a) ¿Cuál será la respuesta a 476×10? ¿A 476×100?

b) ¿Cuál será la respuesta a $9190 \div 10$? ¿A $3310000 \div 100$?

OPCIONAL: MULTIPLICACION LARGA

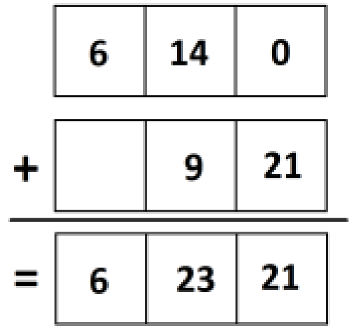
¿Será posible resolver, digamos, 37×23, con puntos y casillas?

Nos piden aquí que multipliquemos tres dieces por 23 y siete unos por 23. Si eres bueno con los múltiplos de 23, eso debe dar $3 \times 23 = 69$ dieces y $7 \times 23 = 161$ unos. Por lo tanto la respuesta es $69|161$. Con explosiones se convierte en 851.

¡Pero este método parece difícil! Requiere que te sepas los múltiplos de 23.

Ejercicio para pensar:

Suzzy pensó por un rato sobre 37×23, eventualmente dibujó el siguiente diagrama.



Luego dijo $37 \times 23 = 6 \,|\, 23 \,|\, 21 = 8 \,|\, 3 \,|\, 21 = 851$.

a) ¿Puedes descifrar lo que Suzzy estaba pensando?

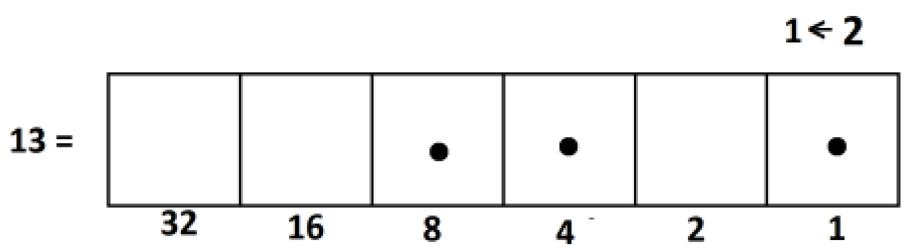
b) ¿Qué diagrama crees que Suzzy dibujaría para 236×34 (y ¿qué respuesta obtendría)?

c) ¿Se obtiene la misma respuesta para 37×23 y 23×37 usando el método de Suzzy? ¿Se te hace obvio que sí a medida que lo resuelves? ¿Se obtiene la misma respuesta para 236×34 y 34×236 con el método de Suzzy?

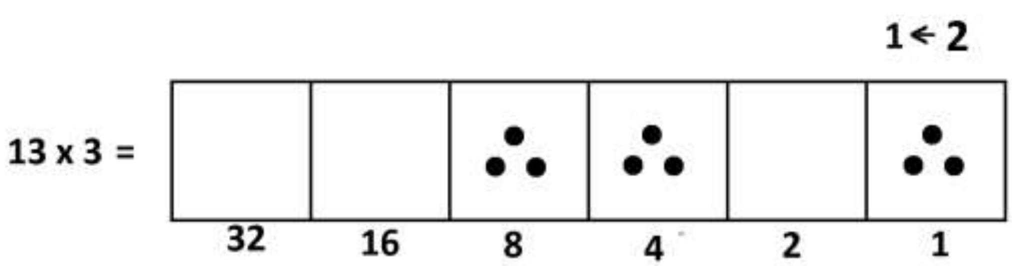
He aquí otra manera divertida de pensar sobre la multiplicación. Trabajemos esta vez con una máquina $1 \leftarrow 2$.

Calculemos 13×3.

Aquí está el 13 en una máquina $1 \leftarrow 2$.

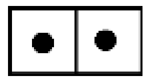


Se nos pide que tripliquemos todo. Por tanto reemplazamos cada punto que vemos por tres puntos.

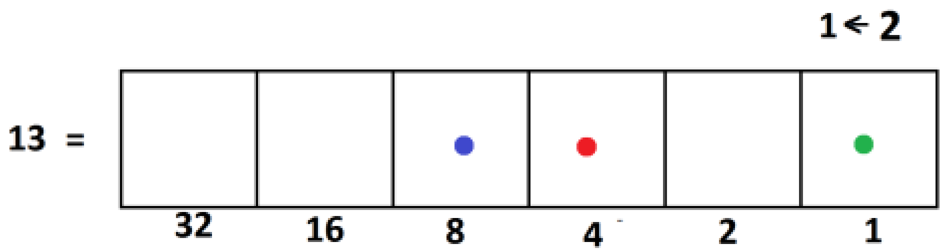


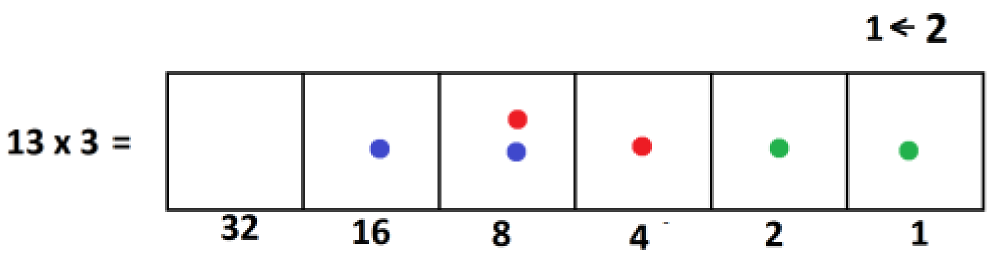
Y ahora podemos hacer algunas explosiones para ver aparecer la respuesta 39 (correspondiente a 100111 en máquina $1 \leftarrow 2$).

Alternativamente, podemos darnos cuenta que tres puntos en una máquina $1 \leftarrow 2$ se ven así



Luego podemos sustituir cada punto de nuestro dibujo de 13 con un punto en la misma casilla y otro punto en la siguiente casilla a su izquierda. (He añadido colores para ayudar)





Ahora vemos aparecer 100111 sin tantas explosiones.

EXPLORACIONES LOCAS

He aquí algunas investigaciones de "preguntas grandes" que quizás quieras explorar, o tan solo pensar sobre ellas. ¡Diviértete!

EXPLORACION 1: EN ADICION LA BASE DIEZ NO TIENE NADA DE ESPECIAL

Aquí hay un problema de adición en una máquina $1 \leftarrow 5$. (Es decir es un problema en base cinco). Este no es un problema de máquina $1 \leftarrow 10$.

$$\begin{array}{r} 20413 \\ +\ \underline{13244} \end{array}$$

a) ¿Cuál es la respuesta en máquina $1 \leftarrow 5$?

b) ¿Cuál número corresponde al código 20413 en máquina $1 \leftarrow 5$? ¿Cuál número corresponde al código 13244 en máquina $1 \leftarrow 5$? ¿Cuánto suman esos dos números y cuál es el código para esa suma en máquina $1 \leftarrow 5$?

[Aquí están las respuestas para que puedas corroborar tu inteligente razonamiento.

La suma como problema en máquina $1 \leftarrow 5$ es

$$20413 + 13244 = 3|3|6|5|7 = 3|4|1|5|7 = 3|4|2|0|7 = 3|4|2|1|2 = 34212$$
.

En máquina $1 \leftarrow 5$, 20413 es dos 625s, cuatro 25s, un 5, y tres 1s, por tanto da el número 1358 en base diez; 13244 es el número 1074 en base diez; y 34212 es el número 2432 en base diez. Acabamos de resolver $1358 + 1074 = 2432$.]

EXPLORACION 2: EN MULTIPLICACION LA BASE DIEZ NO TIENE NADA DE ESPECIAL

Trabajemos con una máquina $1 \leftarrow 3$.

a) Calcula 111×3 en base tres. También, ¿qué da 1202×3 y 2002×3?
¿Puedes explicar lo que notas?

Ahora trabajemos con una máquina $1 \leftarrow 4$.

b) ¿Qué es 133×4 como problema en base cuatro? ¿Qué da 2011×4? ¿Qué da 22×4?
¿Puedes explicar lo que notas?

En general, si trabajamos con una máquina $1 \leftarrow b$, ¿puedes explicar por qué al multiplicar un número en base b por b te devuelve el número original con un cero al final?

SOLUCIONES

Como prometido, aquí están mis soluciones a los problemas planteados.

1.

$$148+323=4|6|11=471$$

$$567+271=7|13|8=838$$

$$377+188=4|15|15=5|5|15=565$$

$$582+714=12|9|6=1|2|9|6=1296$$

$$310462872+389107123=6|9|9|5|6|9|9|9|5=699569995$$

$$87263716381+18778274824=9|15|9|13|11|9|8|10|11|10|5$$
$$=\ldots=106041991205$$

2.

Tenemos que

$$26417\times 4=8|24|16|4|28=10|4|16|4|28=1|0|4|16|4|28=1|0|5|6|4|28=105668$$

$$26417\times 5=10|30|20|5|35=10|30|20|8|5=10|32|0|8|5=13|2|0|8|5=132085$$
$$26417\times 9=18|54|36|9|63=18|54|36|15|3=\ldots=237753$$
$$26417\times 11=22|66|44|11|77=\ldots=290587$$
$$26417\times 12=24|72|48|12|84=\ldots=317004$$

Sigue leyendo el capítulo para ver que 26417×10 da 264170.

3.

a) 476×10 da 4760. Como 476×100 es “476 veces diez veces diez” la respuesta será 47600.

b) Tenemos que 9190 es la respuesta a 919×10. Quiere decir que $9190\div 10$ debe ser 919.

Y 3310000 es la respuesta a 33100×100, y por lo tanto $3310000\div 100$ debe ser 33100.